

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi chuyên: Toán

Ngày thi: 07 tháng 6 năm 2023

(Đề thi gồm 01 trang)

Thời gian làm bài: 150 phút (Không tính thời gian phát đề)

Bài 1. (1,0 điểm) Cho a, b là các số thực, $b \neq 0$ thỏa mãn điều kiện

$$a^2 + b^2 = \frac{4b^2}{\sqrt{a^2 + b^2} + a} + a\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2$.

Bài 2. (2,5 điểm)

a) Giải phương trình: $x = \frac{5}{x-1} + 2\sqrt{x-2}$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{9y+49}{x+y} + x + y = 23 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 7(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \end{cases}$$

Bài 3. (2,5 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), có đường cao AH . Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC , tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Gọi J là giao điểm của AI và DE ; K là trung điểm của AB .

- Chứng minh tứ giác $BIJD$ nội tiếp.
- Gọi M là giao điểm của KI và AC , N là giao điểm của AH và ED . Chứng minh $AM = AN$.
- Gọi Q là giao điểm của DI và EF , P là trung điểm của BC . Chứng minh ba điểm A, P, Q thẳng hàng.

Bài 4. (2,0 điểm) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $\sqrt{1+4xy+2x+2y}+2z=5$.

a) Chứng minh $\frac{1}{\sqrt{(2x+1)(2y+1)}} + \frac{1}{2z+1} \geq \frac{2}{3}$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x+1}{2x+1} + \frac{y+1}{2y+1} + \frac{2z+3}{4z+2}$.

Bài 5. (1,0 điểm) Cho đường tròn tâm O nội tiếp hình thoi $ABCD$. Gọi E, F, G, H là các điểm lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA sao cho EF, GH cùng tiếp xúc với (O) .

- Chứng minh $CG \cdot AH = AO^2$.
- Chứng minh EH song song FG .

Bài 6. (1,0 điểm) Xét các số nguyên $a < b < c$ thỏa mãn $n = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ là số nguyên tố.

- Chứng minh $a < 0$.
- Tìm tất cả các số nguyên a, b, c ($a < b < c$) sao cho n là một ước của 2023.

HẾT

Lời giải tham khảo đề thi tuyển sinh 10 chuyên toán TPHCM 2023

Nguyễn Thái An - Nguyễn Phú Bảo Khang - Trần Minh Khôi

1 Đề thi

Bài 1. (1, 0 điểm)

Cho a, b là số thực $b \neq 0$ thỏa mãn điều kiện

$$a^2 + b^2 = \frac{4b^2}{\sqrt{a^2 + b^2} + a} + a\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2$.

Bài 2 (2, 5 điểm)

a) Giải phương trình: $x = \frac{5}{x-1} + 2\sqrt{x-2}$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{9y+49}{x+y} + x + y = 23, \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 7(\sqrt{x} + \sqrt{y}). \end{cases}$$

Bài 3 (2, 5 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), có đường cao AH . Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC , tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Gọi J là giao điểm của AI và DE ; K là trung điểm của AB .

- Chứng minh tứ giác $BIJD$ nội tiếp.
- Gọi M là giao điểm của KI và AC , N là giao điểm của AH và ED .
- Gọi Q là giao điểm của DI và EF , P là trung điểm của BC .
Chứng minh ba điểm A, P, Q thẳng hàng.

Bài 4 (2,0 điểm)

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $\sqrt{1+4xy+2x+2y}+2z=5$.

a) Chứng minh $\frac{1}{\sqrt{(2x+1)(2y+1)}} + \frac{1}{2z+1} \geq \frac{2}{3}$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x+1}{2x+1} + \frac{y+1}{2y+1} + \frac{2z+3}{4z+2}$.

Bài 5 (1,0 điểm)

Cho đường tròn tâm O nội tiếp hình thoi $ABCD$. Gọi E, F, G, H là các điểm lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA sao cho EF, GH cùng tiếp xúc với (O) .

- Chứng minh $CG \cdot AH = AO^2$.
- Chứng minh EH song song FG .

Bài 6 (1,0 điểm)

Xét các số nguyên $a < b < c$ thỏa mãn $n = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ là số nguyên tố.

- Chứng minh: $a < 0$.
- Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c ($a < b < c$) sao cho n là ước của 2023.

2 Lời giải chi tiết

Bài 1

Cho a, b là số thực $b \neq 0$ thỏa mãn điều kiện

$$a^2 + b^2 = \frac{4b^2}{\sqrt{a^2 + b^2} + a} + a\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2$.

Lời giải.

Do $b \neq 0$ nên $\sqrt{a^2 + b^2} \neq a$.

Từ giả thiết, ta biến đổi

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = \frac{4b^2(\sqrt{a^2 + b^2} - a)}{b^2} + a\sqrt{a^2 + b^2} = 4\sqrt{a^2 + b^2} - 4a + a\sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2}(\sqrt{a^2 + b^2} - 4) - a(\sqrt{a^2 + b^2} - 4) = 0.$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a^2 + b^2} - 4)(\sqrt{a^2 + b^2} - a) = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} = 4 \\ \sqrt{a^2 + b^2} = a \text{ (vô lý).} \end{cases}$$

Vậy $P = a^2 + b^2 = 16$.

Bài 2

a) Giải phương trình: $x = \frac{5}{x-1} + 2\sqrt{x-2}$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{9y+49}{x+y} + x + y = 23, \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 7(\sqrt{x} + \sqrt{y}). \end{cases}$$

 Lời giải.

a) Giải phương trình

$$x = \frac{5}{x-1} + 2\sqrt{x-2}.$$

Điều kiện xác định :
$$\begin{cases} x \neq 1 \\ x \geq 2. \end{cases}$$

Ta có

$$x = \frac{5}{x-1} + 2\sqrt{x-2}$$

$$\Leftrightarrow x(x-1) = 5 + 2(x-1)\sqrt{x-2}.$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2(x-1)\sqrt{x-2} = 5.$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 2(x-1)\sqrt{x-2} + x - 2 = 4.$$

$$\Leftrightarrow (x-1-\sqrt{x-2})^2 = 4.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1-\sqrt{x-2} = 2 \\ x-1-\sqrt{x-2} = -2. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3 = \sqrt{x-2} \quad (x \geq 3) \\ x+1 = \sqrt{x-2} \quad (x \geq 1). \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x + 11 = 0 \\ x^2 + x + 3 = 0 \quad (\text{vô lý vì}) > 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7+\sqrt{5}}{2} \quad (\text{nhận}) \\ x = \frac{7-\sqrt{5}}{2} \quad (\text{loại}). \end{cases}$$

Vậy $S = \left\{ \frac{7+\sqrt{5}}{2} \right\}.$

b) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{9y+49}{x+y} + x + y = 23, & (1) \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 7(\sqrt{x} + \sqrt{y}) & (2). \end{cases}$$

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x+y \neq 0, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$

Từ (2), ta có

$$x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 7(\sqrt{x} + \sqrt{y}).$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y) = 7(\sqrt{x} + \sqrt{y}).$$

$$\Leftrightarrow x - \sqrt{xy} + y = 7 \text{ (Do } x+y \neq 0 \text{ và } x, y \geq 0 \text{ nên } \sqrt{x} + \sqrt{y} \neq 0).$$

Từ (1), ta có

$$\frac{9y+49}{x+y} + x + y = 23.$$

$$\Leftrightarrow 9y + 49 + (x+y)^2 = 23(x+y).$$

$$\Leftrightarrow (x+y-7)^2 = 9x.$$

$$\Leftrightarrow xy = 9x.$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ hay } y = 9.$$

Với $x = 0 \Rightarrow y = 7$ (nhận).

Với $y = 9 \Rightarrow x = 1$ hay $x = 4$ (nhận).

Vậy $(x, y) \in \{(0, 7), (1, 9), (1, 4)\}.$

Bài 3

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), có đường cao AH . Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC , tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Gọi J là giao điểm của AI và DE ; K là trung điểm của AB .

a) Chứng minh tứ giác $BIJD$ nội tiếp.

b) Gọi M là giao điểm của KI và AC , N là giao điểm của AH và ED .

c) Gọi Q là giao điểm của DI và EF , P là trung điểm của BC .

Chứng minh ba điểm A, P, Q thẳng hàng.

 **Lời giải.** a) Từ giả thiết ta có

$$\sqrt{(2x+1)(2y+1)} + 2z = 5.$$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$, ta có

$$\frac{1}{\sqrt{(2x+1)(2y+1)}} + \frac{1}{2z+1} \geq \frac{4}{\sqrt{(2x+1)(2y+1)} + 2z+1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

b) Ta có

$$P = \frac{x+1}{2x+1} + \frac{y+1}{2y+1} + \frac{2z+3}{4z+2},$$

nhân 2 về cho 2 ta được

$$\begin{aligned} 2P &= \frac{2x+2}{2x+1} + \frac{2y+2}{2y+1} + \frac{2z+3}{2z+1} \\ &= 3 + \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2y+1} + \frac{2}{2z+1}. \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy và bất đẳng thức ở câu a), ta có

$$\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2y+1} + \frac{2}{2z+1} \geq \frac{2}{\sqrt{(2x+1)(2y+1)}} + \frac{2}{2z+1} \geq 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Do đó

$$2P \geq 3 + \frac{4}{3} = \frac{13}{3},$$

hay $P \geq \frac{13}{6}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{13}{6}$, dấu $=$ xảy ra khi $x = y = z = 1$.

Bài 5

Cho đường tròn tâm O nội tiếp hình thoi $ABCD$. Gọi E, F, G, H là các điểm lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA sao cho EF, GH cùng tiếp xúc với (O) .

a) Chứng minh $CG \cdot AH = AO^2$.

b) Chứng minh EH song song FG .

Để ý rằng $a + b + c > 1$, và

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2} [(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$$

Do $(a-b)^2, (b-c)^2, (c-a)^2 > 0$ nên $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 3$ ($c > b > a \geq 0$).

Từ đó suy ra

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq \frac{1}{2} \cdot 3 > 1.$$

Vì số nguyên tố phải có 2 ước là 1 và chính nó nên dễ thấy điều trên là vô lý.

Vậy điều giả sử là sai nên ta có được điều phải chứng minh.

b) Ta có $n = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ là số nguyên tố và n là ước của $2023 = 7 \cdot 17^2$ nên $n \in \{7, 17\}$.

Vì $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca > 1$ nên ta xét các trường hợp sau

Trường hợp 1: $(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 7$.

Khi đó ta có

$$\begin{cases} a+b+c = 1, & (1) \\ a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 7. & (2) \end{cases}$$

Từ (2) ta có

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 14 = 1^2 + 2^2 + 3^2.$$

Do $c > b > a$ nên $c-a, b-a, c-b > 0$ và $c-a$ là số lớn nhất trong 3 số $c-a; b-a; c-b$ suy ra $c-a = 3, b-a = 2$ và $c-b = 1$, hay $c-a = 3, b-a = 1$ và $c-b = 2$.

Từ đây ta có 2 khả năng:

Nếu

$$c = a+3; b = a+2; c-b = 1,$$

khi đó thế vào (1) ta được $3a+5 = 1$ hay $a = -\frac{4}{3}$ (vô lý).

Nếu

$$c = a+3; b = a+1; c-b = 2,$$

khi đó thế vào (1) ta được $3a+4 = 1$ hay

$$a = -1; b = 0; c = 2.$$

Trường hợp 2: $a+b+c = 1$ và $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 17$.

Khi đó ta có

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 34 = 0^2 + 3^2 + 5^2.$$

Suy ra tồn tại 2 số trong 3 số a, b, c bằng nhau (vô lý do $a < b < c$).

Vậy $(a, b, c) = (-1; 0; 2)$.