

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1 (2,0 điểm). Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{1-\sqrt{x}} - \frac{3}{x-3\sqrt{x}+2} \right) : \left(2 - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right)$.

- Rút gọn biểu thức A .
- Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

Câu 2 (1,0 điểm). Giải phương trình $2\sqrt{x+6} + x^2 + 4x - 27 = 0$.

Câu 3 (1,0 điểm). Chứng minh rằng:

- $10^{2023} + 2024$ chia hết cho 3;
- $n^3 + 2024n + 2$ không chia hết cho $10^{2023} + 2024$ với mọi số tự nhiên n .

Câu 4 (1,0 điểm). Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên n để cả hai số n và $\frac{n-10}{3}$ đều là các số chính phương.

Câu 5 (1,0 điểm). Cho x, y là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn $4x^2 + 9y^2 = 10$.

Chứng minh rằng $\frac{(2x+9y)^3}{4(x^2+y^2)-4x-8y+55} \leq 20$.

Câu 6 (2,0 điểm). Cho tam giác ABC vuông tại A và $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC , điểm I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

- Chứng minh rằng $\widehat{AMC} = \widehat{AIC} = 120^\circ$.
- Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng MI và AC . Chứng minh rằng $AB = AN$.

Câu 7 (2,0 điểm). Cho tam giác ABC ($AB > BC$) có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn (O) . Vẽ các đường cao AD, BE và CF của tam giác ABC . Gọi điểm H là trực tâm của tam giác ABC , I là trung điểm của đoạn thẳng DF . Tia AI cắt đường tròn (O) tại K ($K \neq A$), tia BE cắt đường tròn (O) tại J ($J \neq B$). Chứng minh rằng:

- E là trung điểm của đoạn thẳng HJ ;
- Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IKD nằm trên đường thẳng BC .

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1 (2,0 điểm). Không sử dụng máy tính cầm tay, rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} + 2\sqrt{2 + \sqrt{2} + \sqrt{5 - \sqrt{24}}}.$$

Câu 2 (1,0 điểm). Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $x^3 - (m-1)x^2 - 2x + 2m - 9 = 0$ có nghiệm nguyên.

Câu 3 (1,0 điểm). Chứng minh rằng $2025^n + n^2 + 2024n + 5$ không phải là số chính phương với mọi số tự nhiên n .

Câu 4 (2,0 điểm). Cho tập hợp S gồm có 18 số tự nhiên khác nhau bất kỳ.

a. Lấy ra 5 phần tử bất kỳ của tập hợp S . Chứng minh rằng trong 5 phần tử lấy ra đó luôn tồn tại 3 phần tử có tổng chia hết cho 3.

b. Chứng minh rằng luôn tồn tại 9 phần tử của tập hợp S có tổng chia hết cho 9.

Câu 5 (2,0 điểm). Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH . Trên đoạn thẳng AB lấy điểm K sao cho $AB = 4AK$. Trên tia đối của tia HA lấy điểm I sao cho

$HI = \frac{1}{4}AH$. Kẻ KP vuông góc với đường thẳng AH ($P \in AH$). Chứng minh rằng:

a. $AH = PI$;

b. Tam giác IKC vuông tại I .

Câu 6 (2,0 điểm). Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) . Kẻ BE vuông góc với AC tại điểm E , CF vuông góc với AB tại điểm F . Các đường thẳng BE, CF lần lượt cắt đường tròn (O) tại hai điểm P, Q ($P \neq B, Q \neq C$). Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại các điểm B, C cắt đường thẳng EF lần lượt tại các điểm M, N . Đường thẳng NP cắt đường tròn (O) tại điểm K ($K \neq P$). Chứng minh rằng:

a. Tam giác NCE là tam giác cân;

b. Các điểm M, Q, K thẳng hàng.