

Câu 1. (4,00 điểm)

a) Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$.

Rút gọn biểu thức A; tính giá trị của A, biết $x = \frac{6+2\sqrt{5}}{2+\sqrt{6+2\sqrt{5}}} + \frac{6-2\sqrt{5}}{2-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$.

b) Cho biết $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \sqrt{2}$ ($a > 1, b > 1$). Chứng minh rằng $ab - \sqrt{1-a^2b^2+a^2+b^2} = 1$.

Câu 2. (6,00 điểm) Giải các phương trình, hệ phương trình sau:

a) $(x-\sqrt{3})^3 + (x+\sqrt{5})^3 + (\sqrt{3}-\sqrt{5}-2x)^3 = 0$.

b)
$$\begin{cases} (xy)^3 + 3xy^3 + 2 = 6y^2 \\ 3xy^3 = y^2 + 2. \end{cases}$$

Câu 3. (3,00 điểm) Cho đoạn thẳng AB, với M là trung điểm. Trên đường trung trực Mt của đoạn thẳng AB lấy điểm I bất kì. Vẽ tia Ax sao cho AI là phân giác góc BAx. Đường thẳng BI cắt Ax tại N. Gọi C là điểm đối xứng của A qua N, H là hình chiếu vuông góc của C lên AB.

a) Chứng minh rằng tam giác NHB cân.

b) Chứng minh đẳng thức: $BH^2 = HI \cdot BN$.

c) Khi điểm I di chuyển trên đường trung trực Mt đến vị trí làm cho tam giác ABC vuông tại C, hãy tính tỉ số $\frac{AB}{AC}$.

Câu 4. (1,00 điểm) Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), với a, b, c là số thực thỏa $2a - b + c = 0$. Chứng minh rằng phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt và 2 nghiệm không thể đều dương.

Câu 5. (3,00 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi D là trung điểm của AB, H là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng DC. Đường thẳng qua C vuông góc với BC cắt đường thẳng AB tại E. Gọi I là hình chiếu vuông góc của E lên đường thẳng DC.

a) Chứng minh BH vuông góc với AI.

b) Đường thẳng qua B vuông góc với BH cắt đường thẳng DC tại K. Chứng minh tứ giác BCEK nội tiếp.

Câu 6. (3,00 điểm) Cho x, y là hai số thực thỏa mãn: $x \geq 1, 0 < y \leq 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} \geq \frac{x}{x^2+y} + \frac{y}{y^2+x}.$$

-----Hết-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....;Số báo danh:.....

Chữ kí giám thị 1:.....;Chữ kí giám thị 2:.....

HƯỚNG DẪN CHẤM THI

(Gồm có 04 trang)

1. Hướng dẫn chung

- Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án mà vẫn đúng thì cho đủ điểm từng phần như hướng dẫn quy định.

- Việc chi tiết hóa thang điểm (nếu có) so với thang điểm chấm phải bảo đảm không sai lệch với hướng dẫn chấm và được thống nhất thực hiện trong Hội đồng chấm thi.

- Điểm bài thi không làm tròn số.

2. Đáp án và thang điểm

CÂU	ĐÁP ÁN	ĐIỂM
1		4,00 đ
	a) Rút gọn, tính giá trị $A = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$, biết $x = \frac{6+2\sqrt{5}}{2+\sqrt{6+2\sqrt{5}}} + \frac{6-2\sqrt{5}}{2-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$.	2,50 đ
	- Rút gọn A: Với điều kiện $x \geq 0, x \neq 1$, ta có: $A = \frac{x+2+\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)-(x+\sqrt{x}+1)}{x\sqrt{x}-1} : \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}$	1,00 đ
	- Lại có: $x = \frac{6+2\sqrt{5}}{2+\sqrt{6+2\sqrt{5}}} + \frac{6-2\sqrt{5}}{2-\sqrt{6-2\sqrt{5}}} = \frac{6+2\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}+1} + \frac{6-2\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}+1} = \frac{16}{4} = 4$.	1,00 đ
	Do đó: $A = \frac{\sqrt{4}+1}{4+\sqrt{4}+1} = \frac{3}{7}$.	0,50 đ
	b) Biết $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \sqrt{2} (a > 1, b > 1)$. CMR: $ab - \sqrt{1-a^2b^2+a^2+b^2} = 1$.	1,50 đ
	Vì $a > 1, b > 1$ nên: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \sqrt{2} \Leftrightarrow a+b = \sqrt{2}ab \Leftrightarrow a^2+b^2 = 2a^2b^2-2ab$.	0,50 đ
	Khi đó: $B = ab - \sqrt{1-a^2b^2+2a^2b^2-2ab} = ab - \sqrt{(ab-1)^2}$.	0,50 đ
	Vì $a > 1, b > 1 \Rightarrow ab > 1$ nên $B = ab - ab + 1 = 1$ (điều phải chứng minh).	0,50 đ
2	Giải các phương trình, hệ phương trình	6,00 đ
	a) $(x-\sqrt{3})^3 + (x+\sqrt{5})^3 + (\sqrt{3}-\sqrt{5}-2x)^3 = 0$	3,00 đ
	Đặt $u = x-\sqrt{3}, v = x+\sqrt{5}$, khi đó $\sqrt{3}-\sqrt{5}-2x = -(u+v)$.	1,00 đ

	PTĐC viết lại là: $u^3 + v^3 - (u+v)^3 = 0 \Leftrightarrow 3(u+v)uv = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=0 \\ u=0 \\ v=0 \end{cases}$	1,00 đ
	(1): $u+v=0 \Rightarrow x-\sqrt{3}+x+\sqrt{5}=0 \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2}$. (2): $u=0 \Rightarrow x=\sqrt{3}$; (3): $v=0 \Rightarrow x=-\sqrt{5}$. Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S=\left\{\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2}; \sqrt{3}; -\sqrt{5}\right\}$.	1,00 đ
	Cách 2: Đặt $a=x-\sqrt{3}, b=x+\sqrt{5}, c=\sqrt{3}-\sqrt{5}-2x$. Khi đó: $a^3+b^3+c^3=3abc$ (chứng minh). Từ đó ta có nghiệm như cách 1.	
	b) $\begin{cases} (xy)^3 + 3xy^3 + 2 = 6y^2 & (1) \\ 3xy^3 = y^2 + 2 & (2) \end{cases}$	3,00 đ
	Đặt $\begin{cases} u=xy \\ v=y^2 \end{cases}$. Dễ thấy $y \neq 0$. Từ (2) suy ra $3xy = \frac{y^2+2}{y^2} > 0$, do đó ta luôn có $u > 0, v > 0$ (3).	0,50 đ
	Ta có hệ phương trình mới: $\begin{cases} u^3 + 3uv + 2 = 6v & (4) \\ 3uv = v + 2 & (5) \end{cases}$. Thế (5) và (4) ta được: $v = \frac{u^3+4}{5}$ (6).	0,50 đ
	Thế (6) vào (5) ta được: $3u^4 - u^3 + 12u - 14 = 0 \Leftrightarrow (u-1)(3u^3 + 2u^2 + 2u + 14) = 0$ (7). Đối chiếu với điều kiện (3) thì $3u^3 + 2u^2 + 2u + 14 > 0$ nên (7) có nghiệm $u=1$. Với $u=1$, từ (6) suy ra $v=1$ hay $y^2=1 \Leftrightarrow y=\pm 1 \Rightarrow x=\pm 1$. Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm: $(x;y)=(1;1)$ và $(x;y)=(-1;-1)$.	1,00 đ
3		3,00 đ
	a) Chứng minh ΔNHB cân	1,00 đ
	ΔAHC vuông tại H có HN là trung tuyến nên $NA = NC = NH$ nên ΔHNA cân tại N, suy ra $NHA = NAH$, do đó $NHA = 2IAB = 2IBH = 2NBH$ (1).	0,50 đ
	Theo tính chất góc ngoài của tam giác thì $NHA = HNB + HBN$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $HNB = HBN$ hay ΔNHB cân tại H.	0,50 đ

	b) Chứng minh $BH^2 = HI.BN$	1,00 đ
	Theo a) ΔNHB cân tại H suy ra $HB = HN = \frac{1}{2} AC$ (3).	0,25 đ
	Xét ΔANI và ΔBHI có $\begin{cases} IAN = IBH \\ IA = IB \\ AN = BH (= HN) \end{cases} \Rightarrow \Delta ANI = \Delta BHI \Rightarrow IN = IH$ dẫn đến ΔNIH cân tại $I \Rightarrow IHN = INH \Rightarrow \Delta NHB \sim \Delta NIH$ (hai tam giác cân có góc ở đáy bằng nhau)	0,50 đ
	$\Rightarrow \frac{BH}{BN} = \frac{HI}{HN} \Rightarrow BH.HN = HI.BN \Leftrightarrow BH^2 = HI.BN$.	0,25 đ
	c) Tính tỉ số $\frac{AB}{AC}$ khi ΔABC vuông	1,00 đ
	Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông và định lí Pytago ta có $BC^2 = BH.BA = AB^2 - AC^2 \Leftrightarrow AB^2 - BH.BA - AC^2 = 0$ (4). Từ (3) và (4) ta có $2AB^2 - AB.AC - 2AC^2 = 0$ (5).	0,50 đ
	Vì $AC > 0$, chia 2 vế cho AC^2 ta được phương trình bậc 2 với $x = \frac{AB}{AC}$ là: $2x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{17}}{4} \\ x = \frac{1-\sqrt{17}}{4} \end{cases}$ Do $\frac{1-\sqrt{17}}{4} < 0$ (loại) nên ta chọn $x = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$, hay $\frac{AB}{AC} = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$.	0,50 đ
4		1,00 đ
	Ta có biệt thức: $\Delta = b^2 - 4ac = b^2 - 4a(b - 2a) = (2a - b)^2 + 4a^2 > 0, \forall a \neq 0$; do đó, phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt.	0,75 đ
	Giả sử 2 nghiệm đã cho là: x_1, x_2 . Theo định lí Viète, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$ Từ giả thiết $2a - b + c = 0 \Rightarrow \frac{b}{a} - \frac{c}{a} = 2$, do đó $-(x_1 + x_2) - x_1 x_2 = 2 \Leftrightarrow (x_1 + 1)(x_2 + 1) = -1$ (*). Nếu 2 nghiệm đều dương thì $(x_1 + 1)(x_2 + 1) > 1$, mâu thuẫn với (*). Vậy 2 nghiệm của phương trình không thể đều dương.	0,25 đ

