SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH NINH BÌNH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2023 – 2024
Môn thi chuyên: TOÁN – Ngày thi: 03/6/2023
Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)
Đề thi gồm có 06 câu trong 02 trang

Câu 1 (2,0 điểm).

a) Cho a, b là hai số thực dương phân biệt thỏa mãn $(1-a)(1-b)+2\sqrt{ab}=1$. Tính giá trị của biểu thức

$$P=\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a-b}-\frac{a}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}.$$

b) Biết đa thức $f(x)=x^3-23x+24$ có ba nghiệm phân biệt a, b, c. Tính giá trị của biểu thức

$$Q=a^3+b^3+c^3.$$

Câu 2 (2,0 điểm).

a) Giải phương trình $\left(\sqrt{x+23}-\sqrt{x+7}\right)\left(\sqrt{6-x}+2\right)=8$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{9}{2} \\ \dfrac{9}{4}+\dfrac{3}{2}\left(x+\dfrac{1}{y}\right)=\left(x+\dfrac{1}{y}\right)\left(y+\dfrac{1}{x}\right) \end{cases}$.

Câu 3 (1,0 điểm). Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=6$. Chứng minh

$$\frac{a}{\sqrt{b^3+1}}+\frac{b}{\sqrt{c^3+1}}+\frac{c}{\sqrt{a^3+1}}\geq 2.$$

Câu 4 (3,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O). Gọi E là điểm đối xứng của B qua AC và F điểm đối xứng của C qua AB. Đường thẳng BE cắt đường thẳng CF tại H.

a) Chứng minh các tứ giác $AHBF$ và $AHCE$ là tứ giác nội tiếp.

b) Đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABE và ACF cắt nhau tại điểm thứ hai là D. Chứng minh F, B, D thẳng hàng và DA là tia phân giác của góc EDF.

c) Gọi P, Q lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABE, ACF. Chứng minh sáu điểm B, C, D, O, P, Q cùng thuộc một đường tròn tâm I và giao điểm (khác D) của đường thẳng AD với đường tròn (I) là trực tâm tam giác APQ.

d) Giả sử H thuộc đường tròn (I). Chứng minh các đường thẳng AI, DH, BC, PQ đồng quy.

Câu 5 (1,0 điểm). Cho p là một số nguyên tố.

a) Chứng minh nếu p lẻ và tồn tại số nguyên x sao cho $(x^2+1)\vdots p$ thì $(p-1)\vdots 4$.

b) Chứng minh $2023p+23^p-24$ không là số chính phương.

Câu 6 (1,0 điểm). Người ta tô màu mỗi điểm trên mặt phẳng bởi một trong hai màu đỏ hoặc xanh. Chứng minh:

a) Tồn tại một tam giác vuông cân có ba đỉnh được tô cùng màu.

b) Tồn tại một tam giác vuông có cạnh huyền bằng 2, một cạnh góc vuông bằng 1 và ba đỉnh được tô cùng màu.

——HẾT——