

Bài 1. (2,0 điểm)

a) Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x+1}} + \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) : \frac{\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}}$ (với $x > 0$).

Rút gọn biểu thức A và chứng minh $A \leq 2$.

b) Cho phương trình: $x^2 - 2(a+1)x + a^2 - 2a + 1 = 0$ (x là ẩn, a là tham số). Chứng minh nếu a là số chính phương thì phương trình đã cho có hai nghiệm cũng là những số chính phương.

Bài 2. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình: $(3x^2 + 4x + 6)\sqrt{3x^2 + 4x + 5} = 27x^3 + 3x$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{y}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) = 1 \\ y + 4\sqrt{y} = x^2 + 3x - 3 - 2(x+1)\sqrt{x}. \end{cases}$$

Bài 3. (3,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC không cân nội tiếp đường tròn tâm O . Vẽ đường kính AT của đường tròn (O) và lấy điểm P trên đoạn thẳng OT ($P \neq T$). Gọi E và F tương ứng là hình chiếu vuông góc của P trên các đường thẳng AC và AB . Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC .

a) Chứng minh $\widehat{OAB} = \widehat{HAC}$ và hai đường thẳng BC, EF song song với nhau.

b) Cho AH và EF cắt nhau tại U ; điểm Q di động trên đoạn thẳng UE ($Q \neq U, Q \neq E$). Đường thẳng vuông góc với AQ tại điểm Q cắt các đường thẳng PE, PF tương ứng tại M, N . Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN . Chứng minh bốn điểm A, M, N, P cùng thuộc một đường tròn và $\widehat{OAH} = \widehat{KAQ}$.

c) Kẻ KD vuông góc với BC ($D \in BC$). Chứng minh đường thẳng đi qua điểm D và song song với AQ luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 4. (1,0 điểm)

Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{2a-1}{a^2+2} + \frac{2b-1}{b^2+2} + \frac{2c-1}{c^2+2}.$$

Bài 5. (2,0 điểm)

a) Tìm các số nguyên tố a, b và số nguyên dương m thỏa mãn $a^2 + b^2 + 18ab = 4.5^m$.

b) Cho 8 điểm phân biệt trên một đường tròn. Đánh số các điểm đó một cách ngẫu nhiên bởi các số $1, 2, \dots, 8$ (hai điểm khác nhau được đánh số bởi hai số khác nhau). Mỗi dây cung nối hai điểm bất kỳ được gán với giá trị tuyệt đối của hiệu các số ở hai đầu mút. Chứng minh rằng luôn tìm được bốn dây cung, đôi một không có điểm chung, sao cho tổng của các số gán với bốn dây cung đó bằng 16.

----- Hết -----

(Thí sinh không sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Cán bộ coi thi 1: Cán bộ coi thi 2:

Bài		Nội dung	Điểm
TT	Ý		
1	a)	$A = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} : \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}$	0,5
		$\frac{2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} \leq 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} \leq 2x - 2\sqrt{x} + 2 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)^2 \geq 0. \text{ Vậy } A \leq 2.$	0,5
	b)	Có $\Delta' = (a+1)^2 - (a^2 - 2a + 1) = 4a \geq 0$	0,25
		Khi đó $x_1 = (a+1) - \sqrt{\Delta'} = (a+1) - 2\sqrt{a} = (\sqrt{a}-1)^2$ $x_2 = (a+1) + \sqrt{\Delta'} = (a+1) + 2\sqrt{a} = (\sqrt{a}+1)^2.$	0,5
		Do a là số chính phương nên $\sqrt{a}$ là số nguyên nên $x_1; x_2$ là số chính phương	0,25
2	a)	Đặt $\sqrt{3x^2+4x+5} = a, 3x = b$	0,25
		Khi đó phương trình trở thành: $a^3 + a = b^3 + b$	
		$\Leftrightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2+1) = 0 \Leftrightarrow a = b$ (vì $a^2+ab+b^2+1 > 0$)	0,25
	b)	$\Leftrightarrow \sqrt{3x^2+4x+5} = 3x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 6x^2 - 4x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2+\sqrt{34}}{6}.$	0,5
		ĐKXĐ: $x \geq 0; y \geq 0$. PT thứ nhất $\Leftrightarrow \sqrt{y} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ (1).	0,25
		PT thứ hai $\Leftrightarrow (\sqrt{y}+2)^2 = (x+1-\sqrt{x})^2.$	0,25
		+TH1: $\sqrt{y}+2 = x+1-\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{y} = x-\sqrt{x}-1$. Kết hợp với (1): $\sqrt{x+1} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3; y = 7 - 4\sqrt{3}$ (tmđkxđ).	0,25
		+TH2: $\sqrt{y}+2 = -x-1+\sqrt{x}$ (Vô lý vì $\sqrt{y}+2 > 0; -x-1+\sqrt{x} < 0$). Vậy $x = 3; y = 7 - 4\sqrt{3}.$	0,25

3		Ta có $\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$ do cùng phụ với $\widehat{ABC}$, suy ra $\widehat{PAF} = \widehat{HAC}$.	0,5
	a)	Có $AEPF$ là tứ giác nội tiếp, suy ra $\widehat{AEF} = \widehat{APF}$	0,25
		Có $\widehat{APF} = 90^\circ - \widehat{PAF}$ và $\widehat{ACB} = 90^\circ - \widehat{HAC} \Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{ACB} \Rightarrow EF \parallel BC$	0,25
		$AQEM$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{AEF} = \widehat{APN} \Rightarrow A, M, N, P$ cùng nằm trên một đường tròn.	0,5
	b)	Ta có $\widehat{AMN} = \widehat{ACB}$, tương tự $\widehat{ANM} = \widehat{ABC}$	0,25
		$\widehat{OAH} = \widehat{OAB} - \widehat{HAB} = 90^\circ - \widehat{ACB} - (90^\circ - \widehat{ABC})$ $= 90^\circ - \widehat{AMN} - (90^\circ - \widehat{ANM}) = \widehat{KAN} - \widehat{QAN} = \widehat{KAQ}$	0,25
		Gọi L là chân đường vuông góc hạ từ điểm A xuống đường thẳng KD . Từ $\widehat{OAH} = \widehat{KAQ} \Rightarrow \widehat{KAO} = \widehat{KAQ} - \widehat{OAQ} = \widehat{OAH} - \widehat{OAQ} = \widehat{QAH}$.	0,25
	c)	Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AP và J là giao điểm của đường thẳng qua D song song với AQ và đường thẳng qua I vuông góc với BC . $\Rightarrow \widehat{QAH} = \widehat{JDL}$	0,25
		$\Rightarrow \widehat{ILK} = \widehat{JDL}$, mặt khác ta có $IJ \parallel LD$ nên suy ra tứ giác $ILDJ$ (hoặc $IJLD$) là hình thang cân.	0,25
		Suy ra, I và J đối xứng với nhau qua trung trực của DL , hay qua trung trực của AH . Do $ALDH$ là hình chữ nhật (dễ thấy). Từ đây, vì I là điểm cố định và trung trực của AH là đường thẳng cố định nên J là điểm cố định.	0,25
4		Không mất tính tổng quát, ta giả sử $ab \geq 0$. Khi đó $P+3 \geq \frac{(a+b+2)^2}{(a+b)^2+4} + \frac{(c+1)^2}{c^2+2} = \frac{(c-2)^2}{c^2+4} + \frac{(c+1)^2}{c^2+2}.$	0,5

		Xét BĐT: $\frac{(c-2)^2}{c^2+4} + \frac{(c+1)^2}{c^2+2} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow c^2(c-2)^2 \geq 0$ (đúng).	0,25
		Vậy $P \geq \frac{-3}{2}$; dấu đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi $a = b = c = 0$, $a = b = -1, c = 2$. Do đó $P_{\min} = \frac{-3}{2}$.	0,25
5		Ta có $(a-b)^2 = 4.5^m - 20ab:5 \Rightarrow (a-b):5 \Rightarrow (a-b)^2:25$.	0,25
		$a, b \geq 2 \Rightarrow a^2 + b^2 + 18ab = 4.5^m \geq 80 \Rightarrow m \geq 2$	0,25
	a)	$\Rightarrow 20ab = (a-b)^2 - 4.5^m:25 \Rightarrow 20ab:25 \Rightarrow ab:5$ $\Rightarrow \begin{cases} a:5 \\ b:5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a:5 \\ b:5 \end{cases} \Rightarrow a = b = 5; m = 3.$	0,5
		Gọi X là tập 4 điểm được gán các số 1, 2, 3, 4 và Y là tập 4 điểm còn lại. Ta sẽ chỉ ra rằng tồn tại 4 dây cung không có điểm chung, mỗi dây cung nối một điểm của X và một điểm của Y . Một cách nối như vậy thỏa mãn yêu cầu bài toán vì tổng các số tương ứng với 4 dây cung này bằng $5 + 6 + 7 + 8 - 4 - 3 - 2 - 1 = 16$.	0,25
	b)	Dễ thấy rằng có một điểm của X nằm kề một điểm của Y . Kẻ dây cung nối 2 điểm này rồi loại bỏ 2 điểm đánh dấu này lần dây cung đi, ta còn lại 6 điểm được đánh dấu trên đường tròn và 2 tập con X_1, Y_1 tương ứng, mỗi tập gồm 3 điểm được đánh dấu. Bây giờ, lập luận tương tự, ta cũng suy ra có một điểm của X_1 kề nhau với một điểm Y_1 trên đường tròn đã bỏ đi 2 điểm trước đó. Kẻ dây cung nối 2 điểm này rồi loại bỏ 2 điểm đánh dấu này lần dây cung đi, ta còn lại 4 điểm được đánh dấu trên đường tròn và 2 tập con X_2, Y_2 tương ứng, mỗi tập gồm 2 điểm được đánh dấu. Lập luận tương tự, ta cũng suy ra có một điểm của X_2 kề nhau với một điểm Y_2 trên đường tròn đã bỏ đi 2 điểm trước đó. Kẻ dây cung nối 2 điểm này cũng như dây cung nối 2 điểm còn lại. Bây giờ, khôi phục lại các dây cung ban đầu. Dễ thấy, 4 dây cung được kẻ đôi một không có điểm chung.	0,75

Chú ý:- Trên đây chỉ trình bày tóm tắt một cách giải, nếu thí sinh làm theo cách khác mà đúng thì cho điểm tối đa ứng với điểm của câu đó trong biểu điểm.

- Thí sinh làm đúng đến đâu cho điểm đến đó theo đúng biểu điểm.
- Trong một câu, nếu thí sinh làm phần trên sai, dưới đúng thì không chấm điểm.
- Bài hình học, thí sinh không vẽ hình mà làm vẫn làm đúng thì cho nửa số điểm của các câu làm được.
- Bài có nhiều ý liên quan tới nhau, nếu thí sinh công nhận ý trên để làm ý dưới mà thí sinh làm đúng thì chấm điểm ý đó.
- Điểm của bài thi là tổng điểm các câu làm đúng và không được làm tròn.