

Câu 1. (2.0 điểm) Cho biểu thức $P = \frac{3a + \sqrt{9a} - 3}{a + \sqrt{a} - 2} - \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} + 2} + \frac{\sqrt{a} - 2}{1 - \sqrt{a}}$ với $a \geq 0, a \neq 1$.

a) Rút gọn P .

b) Tìm a nguyên để biểu thức P nhận giá trị nguyên.

Câu 2. (4.0 điểm)

a) Cho phương trình $5x^2 + mx - 28 = 0$, với m là tham số.

Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt thỏa mãn

$$5x_1 + 2x_2 = 1.$$

b) Giải phương trình: $(x+4)(x-2) = 2\sqrt{x^2 + 2x - 5}$.

c) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 3xy + 7x - 5y + 6 = 0 \\ 4x^2 - y^2 + 9x + 9 = \sqrt{2x + y + 2} + \sqrt{x + 4y + 1} \end{cases}$$

Câu 3. (1.0 điểm)

a) Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$.

b) Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh $(p-1)(p+1)$ chia hết cho 24.

Câu 4. (2.0 điểm)

Cho đoạn thẳng AB và C là điểm nằm trên đoạn AB sao cho $BC > AC$. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB , vẽ nửa đường tròn đường kính AB và nửa đường tròn đường kính BC . Lấy điểm M thuộc nửa đường tròn đường kính BC ($M \neq B, M \neq C$). Kẻ MH vuông góc với BC ($H \in BC$), đường thẳng MH cắt nửa đường tròn đường kính AB tại K . Hai đường thẳng AK và CM cắt nhau tại E .

a) Chứng minh tứ giác $BMKE$ nội tiếp và $BE^2 = BA \cdot BC$.

b) Từ C kẻ CN vuông góc với AB (N thuộc nửa đường tròn đường kính AB), gọi P là giao điểm của NK và CE . Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác BNE và PNE cùng nằm trên đường thẳng BP .

Câu 5. (1.0 điểm)

a) Cho một bảng gồm 2023 hàng, 2023 cột. Các hàng được đánh số từ 1 đến 2023 từ trên xuống dưới; các cột đánh số từ 1 đến 2023 từ trái qua phải. Viết các số tự nhiên liên tiếp 0, 1, 2, ... vào các ô của bảng theo đường chéo zíc-zắc (như hình vẽ bên). Hỏi số 2024 được viết ở hàng nào, cột nào? Vì sao?

Cột	1	2	3	4	...	2023
Hàng	1	2	3	4	...	2023
1	0	1	5	6	...	
2	2	4	7	13		
3	3	8	12			
4	9	11				
5	10					
...	...					
2023						

b) Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh:

$$\frac{bc}{2a+b+c} + \frac{ca}{2b+c+a} + \frac{ab}{2c+a+b} \leq \frac{a+b+c}{4}.$$

HẾT.

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu, giám thị coi thi không giải thích gì thêm.