

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang)

Câu 1. (2,0 điểm)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{2}{\sqrt{x}+1} + \frac{x+5}{x-\sqrt{x}-2} \right) : \left(1 - \frac{3}{4-x} \right)$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm các giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} y - 2x - 1 = 0 \\ 4x^2 - 3xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

b) Giải phương trình: $x^2 + 2x + 7 = 3\sqrt{(x^2 + 1)(x + 3)}$.

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Tìm giá trị của tham số k để đường thẳng $(d_1): y = -x + 2$ cắt đường thẳng $(d_2): y = 2x + 3 - k$ tại một điểm nằm trên trục hoành.

b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2mx - m + 1$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| > \sqrt{3}$.

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB > AC$) nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Đường cao AH của tam giác ABC cắt đường tròn $(O; R)$ tại điểm thứ hai là D . Kẻ DM vuông góc với AB tại M .

a) Chứng minh tứ giác $BMHD$ nội tiếp được đường tròn và DA là tia phân giác của góc $\widehat{MDC}$.

b) Từ D kẻ DN vuông góc với đường thẳng AC tại N . Chứng minh ba điểm M, H, N thẳng hàng.

c) Cho $P = AB^2 + AC^2 + CD^2 + BD^2$. Tính giá trị biểu thức P theo R .

Câu 5. (1,0 điểm)

a) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn: $(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 2$.

Tính $Q = x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1}$.

b) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn: $4x^2 + 4y^2 + 17xy + 5x + 5y \geq 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 17x^2 + 17y^2 + 16xy$.

-----Hết-----

ĐỀ BÀI:

Câu 1. (2,0 điểm)

Cho biểu thức: $A = \left(\frac{2}{\sqrt{x}+1} + \frac{x+5}{x-\sqrt{x}-2} \right) : \left(1 - \frac{3}{4-x} \right)$ ($x \geq 0$; $x \neq 1$; $x \neq 4$)

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm các giá trị nguyên của x để A đạt giá trị nguyên.

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} y - 2x - 1 = 0 \\ 4x^2 - 3xy + y^2 = 1 \end{cases}$$

b) Giải phương trình: $x^2 + 2x + 7 = 3\sqrt{(x^2 + 1)(x + 3)}$

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Tìm giá trị của tham số k để đường thẳng $(d_1): y = -x + 2$ cắt đường thẳng $(d_2): y = 2x + 3 - k$ tại một điểm nằm trên trục hoành.

b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2mx - m + 1$ (Với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn: $|x_1 - x_2| > \sqrt{3}$.

Câu 4. (2,5 điểm)

Cho ΔABC có ba góc nhọn ($AB > AC$) nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Đường cao AH của ΔABC cắt đường tròn $(O; R)$ tại điểm thứ hai là D . Kẻ $DM \perp AB$ tại M .

a) Chứng minh tứ giác $BMHD$ nội tiếp được đường tròn và DA là tia phân giác của $\widehat{MDC}$.

b) Từ D kẻ $DN \perp AC$ tại N . Chứng minh ba điểm M, H, N thẳng hàng.

c) Cho $P = AB^2 + AC^2 + BD^2 + CD^2$. Tính giá trị biểu thức P theo R .

Câu 5. (1,0 điểm)

a) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn: $(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 2$. Tính giá trị biểu thức $Q = x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1}$.

b) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn: $4x^2 + 4y^2 + 17xy + 5x + 5y \geq 1$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 17x^2 + 17y^2 + 16xy$.

-----Hết-----

**LỜI GIẢI ĐỀ TUYỂN SINH VÀO 10 CHUYÊN TỈNH SƠN LA
NĂM HỌC 2022 – 2023**

Câu 1. (2,0 điểm)

Cho biểu thức: $A = \left(\frac{2}{\sqrt{x}+1} + \frac{x+5}{x-\sqrt{x}-2} \right) : \left(1 - \frac{3}{4-x} \right)$ ($x \geq 0$; $x \neq 1$; $x \neq 4$)

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm các giá trị nguyên của x để A đạt giá trị nguyên.

Lời giải:

a) Với $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1; 4 \end{cases} \Rightarrow A = \left(\frac{2}{\sqrt{x}+1} + \frac{x+5}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} \right) : \left(\frac{4-x-3}{4-x} \right)$

$$\Rightarrow A = \frac{2(\sqrt{x}-2)+x+5}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} : \left(\frac{1-x}{4-x} \right) = \frac{x+2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} : \left(\frac{x-1}{x-4} \right) = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} \cdot \left(\frac{x-4}{x-1} \right)$$

$$\Rightarrow A = \frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-2)} \cdot \left(\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right) = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$$

Vậy $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$

b) Ta có: $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}-1+3}{\sqrt{x}-1} = 1 + \frac{3}{\sqrt{x}-1}$

Để A đạt giá trị nguyên $\frac{3}{\sqrt{x}-1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{x}-1 \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$

Lập bảng:

$\sqrt{x}-1$	- 1	1	- 3	3
$\sqrt{x}$	0	2	- 2	4
x	0	4		16
	TM	Loại	Loại	TM

Vậy $x \in \{0; 16\} \Rightarrow A \in \mathbb{Z}$.

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y-2x-1=0 \\ 4x^2-3xy+y^2=1 \end{cases}$

b) Giải phương trình: $x^2+2x+7=3\sqrt{(x^2+1)(x+3)}$

Lời giải:

a) Ta có: $\begin{cases} y-2x-1=0 \\ 4x^2-3xy+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+1 & (1) \\ 4x^2-3xy+y^2=1 & (2) \end{cases}$

Thay (1) vào (2) ta được: $4x^2-3x(2x+1)+(2x+1)^2=1 \Leftrightarrow 4x^2-6x^2-3x+4x^2+4x+1=1$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(2x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Với $x = 0 \Rightarrow y = 1$

Với $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = 0$

Vậy $(x; y) = (0; 1); \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$

b) ĐKXD: $x \geq -3 \Rightarrow PT \Leftrightarrow x^2 + 1 + 2(x+3) = 3\sqrt{(x^2+1)(x+3)} \quad (*)$

Đặt: $\begin{cases} a = \sqrt{x+3} \\ b = \sqrt{x^2+1} \end{cases} (a \geq 0; b > 0)$

$$\Rightarrow (*) \Leftrightarrow b^2 + 2a^2 = 3ab \Leftrightarrow 2a^2 - 3ab + b^2 = 0 \Leftrightarrow 2a^2 - 2ab - ab + b^2 = 0 \Leftrightarrow 2a(a-b) - b(a-b) = 0$$

$$(a-b)(2a-b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ 2a-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ 2a=b \end{cases}$$

TH1: Nếu $a = b \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow x^2 + 1 = x + 3 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases} (TM)$

TH2: Nếu $2a = b \Leftrightarrow 2\sqrt{x+3} = \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow x^2 + 1 = 4(x+3) \Leftrightarrow x^2 - 4x - 11 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{15} \\ x = 2 - \sqrt{15} \end{cases} (TM)$

Vậy $S = \{-1; 2; 2 \pm \sqrt{15}\}$

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Tìm giá trị của tham số k để đường thẳng $(d_1): y = -x + 2$ cắt đường thẳng $(d_2): y = 2x + 3 - k$ tại một điểm nằm trên trục hoành.

b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2mx - m + 1$ (Với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn: $|x_1 - x_2| > \sqrt{3}$.

Lời giải:

a) Giả sử $A(x_A; y_A)$ là giao điểm của đường thẳng $(d_1): y = -x + 2$ và $(d_2): y = 2x + 3 - k$

$$\text{Do: } A \text{ nằm trên trục hoành và } A \in d_1 \Rightarrow \begin{cases} y_A = 0 \\ y_A = -x_A + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_A = 0 \\ 0 = -x_A + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_A = 0 \\ x_A = 2 \end{cases} \Rightarrow A(2; 0)$$

$$\text{Mà: } A \in d_2 \Rightarrow 0 = 2.2 + 3 - k \Rightarrow k = 7$$

Vậy $k = 7$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

b) Xét phương trình hoành độ giao điểm giữa (P) và (d) :

$$x^2 = 2mx - m + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m - 1 = 0 \quad (a = 1; b = -2m; c = m - 1)$$

$$\text{Ta có: } \Delta' = b'^2 - ac = (-m)^2 - 1.(m-1) = m^2 - m + 1 = m^2 - 2.m.\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \quad \forall m$$

$\Rightarrow (P)$ luôn cắt (d) tại hai điểm phân biệt với $\forall m$

Theo Vi-Et ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 2m \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = m - 1 \end{cases}$$

Mà: $|x_1 - x_2| > \sqrt{3} \Leftrightarrow |x_1 - x_2|^2 > (\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 > 3 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 > 3 (*)$

Thay vào (*) ta được: $(2m)^2 - 4(m - 1) > 3 \Leftrightarrow 4m^2 - 4m + 1 > 0 \Leftrightarrow (2m - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{2}$

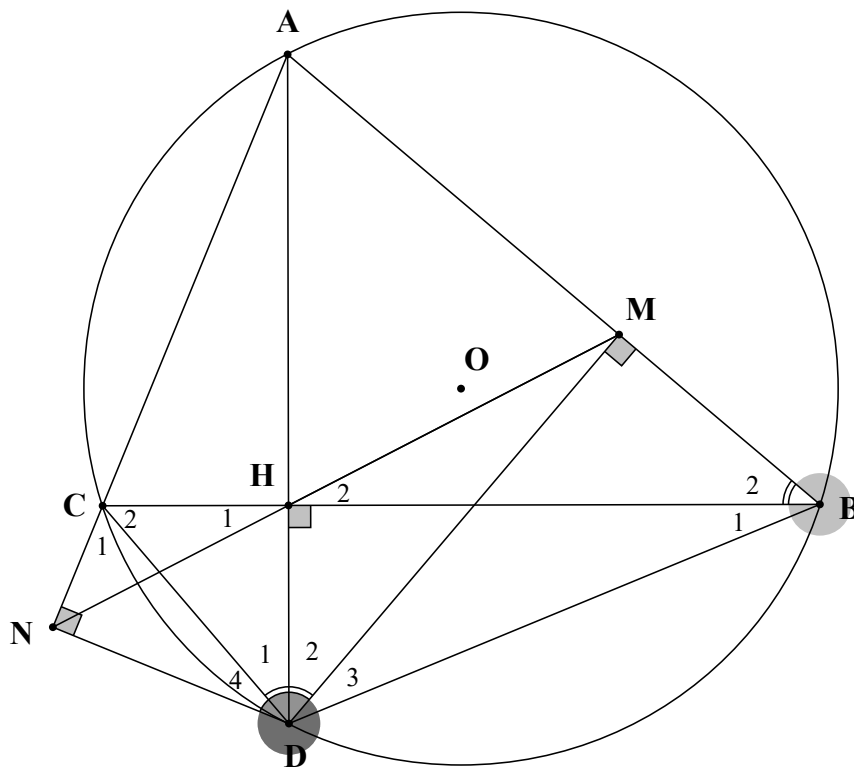
Vậy $m \neq \frac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho ΔABC có ba góc nhọn ($AB > AC$) nội tiếp đường tròn ($O; R$). Đường cao AH của ΔABC cắt đường tròn ($O; R$) tại điểm thứ hai là D . Kẻ $DM \perp AB$ tại M .

- Chứng minh tứ giác $BMHD$ nội tiếp được đường tròn và DA là tia phân giác của $\widehat{MDC}$.
- Từ D kẻ $DN \perp AC$ tại N . Chứng minh ba điểm M, H, N thẳng hàng.
- Cho $P = AB^2 + AC^2 + BD^2 + CD^2$. Tính giá trị biểu thức P theo R .

Lời giải:



a) Ta có: $\widehat{DHB} = \widehat{DMB} = 90^\circ \Rightarrow \square DHMB$ nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{D_2} = \widehat{B_2} = \frac{1}{2} \widehat{HM}$$

$$\text{Mà: } \Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{B_2} = \frac{1}{2} \widehat{AC}$$

$$\Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{D_2} (= \widehat{B_2}) \Rightarrow \text{đpcm}$$

b) Ta có: $\square ABDC$ nội tiếp $\widehat{C_1} = \widehat{ABD}$ (góc ngoài tứ giác nội tiếp)

$$\Rightarrow \Delta NCD \approx \Delta MBD (g.g) \Rightarrow \widehat{D}_4 = \widehat{D}_3 \text{ (hai góc tương ứng)}$$

Mà: $\square NCHD$ nội tiếp (Vì: $\widehat{N} = \widehat{H} = 90^\circ$)

$$\Rightarrow \widehat{D}_4 = \widehat{H}_1$$

$$\text{Mặt khác: } \widehat{D}_3 = \widehat{H}_2 = \frac{1}{2} \widehat{MB} \Rightarrow \widehat{H}_1 = \widehat{H}_2$$

Do: C, H, B thẳng hàng nên ta có đpcm.

c)

Câu 5. (1,0 điểm)

a) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn: $(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 2$. Tính giá trị biểu thức $Q = x\sqrt{y^2 + 1} + y\sqrt{x^2 + 1}$.

b) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn: $4x^2 + 4y^2 + 17xy + 5x + 5y \geq 1$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 17x^2 + 17y^2 + 16xy$.

Lời giải:

a) Ta có:

$$(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 2 \Leftrightarrow (x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1})(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = 2(-x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\Leftrightarrow (y + \sqrt{y^2 + 1}) = -2x + 2\sqrt{x^2 + 1} \quad (1)$$

$$TT : (x + \sqrt{x^2 + 1}) = -2y + 2\sqrt{y^2 + 1} \quad (2)$$

$$\text{Trừ (1) với (2) vế theo vế: } x - y + \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{y^2 + 1} = -2y + 2x + 2\sqrt{y^2 + 1} - 2\sqrt{x^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow (x - y) - 3(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{y^2 + 1}) = 0 \Leftrightarrow (x - y) \left(1 - \frac{3(x + y)}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} - 3x - 3y = 0 \end{cases}$$

$$\text{TH1: Nếu } x = y \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{2} - x \Leftrightarrow \begin{cases} x < \sqrt{2} \\ x^2 + 1 = 2 - 2\sqrt{2}x + x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} = y \Rightarrow Q = \frac{3}{4}$$

$$\text{TH2: Nếu } \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} - 3x - 3y = 0$$

-----Hết-----