

Câu 1: (1,5 điểm)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} \right) (x\sqrt{x} - \sqrt{x})$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm tất cả các số nguyên x sao cho biểu thức A nhận giá trị là số nguyên.

Câu 2: (1,5 điểm)

a) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = kx + 2$. Gọi I là giao điểm của (d) và trục tung. Tìm tất cả các giá trị của k để đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ thỏa mãn $x_1 < x_2$ và $IA = 2IB$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - xy^2 - (x - y + 1)(x + y) = 0 \\ x - 2y^2 - y + 1 = 0 \end{cases}$$

Câu 3: (2,0 điểm)

a) Tìm m để phương trình $3x^2 + 4(m-1)x - m^2 - 4m - 5 = 0$ (x là ẩn số) có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho biểu thức $P = \frac{x_1^3}{x_2^3} + \frac{x_2^3}{x_1^3}$ đạt giá trị lớn nhất.

b) Giải phương trình $(x^2 + 6)\sqrt{x^2 + 6x + 12} - (3x^2 + 10x + 28)\sqrt{x+1} = 0$.

Câu 4: (3,0 điểm)

Cho đường tròn (O) và dây BC cố định không đi qua O. Điểm A thay đổi trên cung lớn BC sao cho ABC là tam giác nhọn và $AB < AC$. Gọi AD, BE, CF là các đường cao và H là trực tâm của tam giác ABC. Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng BC và EF; I là giao điểm thứ hai của KA với (O); M là trung điểm BC; N là giao điểm thứ hai của AH và (O). Chứng minh:

a) Tứ giác AIFE là tứ giác nội tiếp;

b) Ba điểm M, H, I thẳng hàng;

c) Tứ giác INMO là tứ giác nội tiếp;

d) Đường thẳng IN luôn đi qua một điểm cố định khi A thay đổi.

Câu 5: (2,0 điểm)

a) Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn $x^3 - x^2(y+1) + x(7+y) - 4 - y = 0$.

b) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy + yz + zx = 3$. Chứng minh:

$$\frac{x}{x^2+15} + \frac{y}{y^2+15} + \frac{z}{z^2+15} \leq \frac{3+x+y+z}{32}.$$

———— HẾT ————

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:Số báo danh:

Chữ ký của CBCT 1:Chữ ký của CBCT 2:

Câu 1: (1,5 điểm) Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x} + 2}{x + 2\sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 1} \right) \cdot (x\sqrt{x} - \sqrt{x})$ ($x \geq 0; x \neq 1$).

- Rút gọn biểu thức A .
- Tìm tất cả số nguyên x sao cho biểu thức A nhận giá trị là số nguyên.

Câu 2: (1,5 điểm)

- Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = kx + 2$. Gọi I là giao điểm của (d) và trục tung. Tìm tất cả các giá trị của k để đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thỏa mãn $x_1 < x_2$ và $IA = 2IB$.
- Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - xy^2 - (x - y + 1)(x + y) = 0 \\ x - 2y^2 - y + 1 = 0 \end{cases}$$

Câu 3: (2,0 điểm)

- Tìm m để phương trình: $3x^2 + 4(m - 1)x - m^2 - 4m - 5 = 0$ (x là ẩn số) có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho biểu thức $P = \frac{x_1^3}{x_2^3} + \frac{x_2^3}{x_1^3}$ đạt giá trị lớn nhất.
- Giải phương trình $(x^2 + 6)\sqrt{x^2 + 6x + 12} - (3x^2 + 10x + 28)\sqrt{x + 1} = 0$

Câu 4: (3.0 điểm) Cho đường tròn (O) và dây BC cố định không đi qua O . Điểm A thay đổi trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC là tam giác nhọn ($AB < AC$). Gọi AD, BE, CF là các đường cao và H là trực tâm của tam giác ABC . Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng BC và EF ; I là giao điểm thứ hai của KA với (O) ; M là trung điểm BC ; N là giao điểm thứ hai của AH và (O) . Chứng minh:

- Tứ giác $AIFE$ là tứ giác nội tiếp.
- Ba điểm M, H, I thẳng hàng.
- Tứ giác $INMO$ là tứ giác nội tiếp.
- Đường thẳng IN luôn đi qua một điểm cố định khi A thay đổi.

Câu 5: (2,0 điểm)

- Tìm tất cả số nguyên x, y thỏa mãn $x^3 - x^2(y + 1) + x(7 + y) - 4 - y = 0$.
- Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy + yz + zx = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{x^2 + 15} + \frac{y}{y^2 + 15} + \frac{z}{z^2 + 15} \leq \frac{3 + x + y + z}{32}.$$

-----HẾT-----

ĐÁP ÁN CHI TIẾT

Câu 1: (1,5 điểm) Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} \right) \cdot (x\sqrt{x} - \sqrt{x})$ ($x \geq 0; x \neq 1$).

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm tất cả số nguyên x sao cho biểu thức A nhận giá trị là số nguyên.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} \right) \cdot (x\sqrt{x} - \sqrt{x}) \\ &= \left(\frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)^2} - \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right) \cdot \sqrt{x}(x-1) \\ &= \left(\frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}-1)} \right) \cdot \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1) \\ &= \left(\frac{x+\sqrt{x}-2-(x-\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}-1)} \right) \cdot \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1) \\ &= \left(\frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}-1)} \right) \cdot \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1) = \frac{2x}{\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

b) Ta có

$$A = \frac{2x}{\sqrt{x}+1} = 2\sqrt{x} - 2 + \frac{2}{\sqrt{x}+1}$$

Để A là số nguyên thì $2\sqrt{x}$ và $\frac{2}{\sqrt{x}+1}$ phải là số nguyên

Ta có $\frac{2}{\sqrt{x}+1}$ là số nguyên khi $\begin{cases} x=0 \\ x=1(\text{loại}) \end{cases}$

Thử lại

Với $x=0 \Rightarrow A=0$ (TM)

Vậy $x=0$ thì A là số nguyên.

Câu 2: (1,5 điểm)

- a) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = kx + 2$. Gọi I là giao điểm của (d) và trục tung. Tìm tất cả các giá trị của k để đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ thỏa mãn $x_1 < x_2$ và $IA = 2IB$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - xy^2 - (x - y + 1)(x + y) = 0 \\ x - 2y^2 - y + 1 = 0 \end{cases}$$

Lời giải

- a) Vì I là giao điểm của (d) và trục tung nên $I(0; 2)$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là $x^2 = kx + 2 \Leftrightarrow x^2 - kx - 2 = 0 \quad (1)$

Ta có $\Delta = k^2 + 8 > 0$ với mọi k

Và $x_1 \cdot x_2 = -2 < 0$

Nên phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1 < 0 < x_2$ với mọi k

Theo hệ thức vi-ét, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = k \\ x_1 \cdot x_2 = -2 \end{cases}$$

Vì $IA = 2IB$ nên ta có
$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_1 = -2x_2 \end{cases}$$

Mà $x_1 < 0 < x_2$ nên $x_1 = -2x_2$

Ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = k \\ x_1 \cdot x_2 = -2 \\ x_1 < 0 < x_2 \\ x_1 = -2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_2^2 = -2 \\ x_1 < 0 < x_2 \\ x_2 = -k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 1 \\ k = -1 \end{cases}$$

Vậy $k = -1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Ta có:
$$\begin{cases} x^3 - xy^2 - (x - y + 1)(x + y) = 0 \\ x - 2y^2 - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x - y)(x + y) - (x - y + 1)(x + y) = 0 \\ x - 2y^2 - y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)(x^2 - xy - x + y - 1) = 0 \\ x - 2y^2 - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 - xy - x + y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y^2 - y + 1 = 0 \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} x^2 - xy - x + y - 1 = 0 \\ x - 2y^2 - y + 1 = 0 \end{cases} \quad (2) \end{cases}$$

$$\text{Giải hệ phương trình (1): } \begin{cases} x+y=0 \\ x-2y^2-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ -2y^2-2y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ y=\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ x=\frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ y=\frac{-1-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Giải hệ phương trình (2): } \begin{cases} x^2-xy-x+y-1=0 \\ x-2y^2-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-xy-(2y^2-1)-1=0 \\ x-y=2y^2-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-xy-2y^2=0 \\ x-y=2y^2-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x-2y)=0 \\ x-y=2y^2-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=-y \\ x-y=2y^2-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2y \\ x-y=2y^2-1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=\frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ y=\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ x=\frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ y=\frac{-1-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ x=-1 \\ y=\frac{-1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm:

$$(x; y) = \left\{ \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}; \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \right); \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}; \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \right); (2; 1); \left(-1; \frac{-1}{2} \right) \right\}$$

Câu 3: (2,0 điểm)

- a) Tìm m để phương trình: $3x^2 + 4(m-1)x - m^2 - 4m - 5 = 0$ (x là ẩn số) có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho biểu thức $P = \frac{x_1^3}{x_2^3} + \frac{x_2^3}{x_1^3}$ đạt giá trị lớn nhất.

- b) Giải phương trình $(x^2 + 6)\sqrt{x^2 + 6x + 12} - (3x^2 + 10x + 28)\sqrt{x+1} = 0$

Lời giải

- a) Ta có: $ac = -3m^2 - 12m - 15 = -3(m+2)^2 - 3 < 0, \forall m$ nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt trái dấu

Theo hệ thức vi-ét, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{4-4m}{3} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{-m^2-4m-5}{3} \end{cases}$$

Đặt $t = -\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3$ ($t > 0$)

Lúc đó: $P = -t - \frac{1}{t} = -\left(t + \frac{1}{t}\right) \leq -2$

P đạt giá trị lớn nhất là -2 khi $t = \frac{1}{t} \Rightarrow t = 1 \Rightarrow x_1 = -x_2 \Rightarrow m = 1$.

- b) $(x^2 + 6)\sqrt{x^2 + 6x + 12} - (3x^2 + 10x + 28)\sqrt{x+1} = 0$

Điều kiện: $x \geq -1$.

Ta có:

$$\begin{aligned} & (x^2 + 6)\sqrt{x^2 + 6x + 12} - (3x^2 + 10x + 28)\sqrt{x+1} = 0 \\ \Leftrightarrow & (x^2 + 6)\sqrt{(x+6)+6(x+1)} - [3(x^2 + 6) + 10(x+1)]\sqrt{x+1} = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Đặt
$$\begin{cases} a = x^2 + 6, & a > 0 \\ b = \sqrt{x+1}, & b \geq 0 \end{cases}$$

Phương trình (1) trở thành:

$$a\sqrt{a+6b^2} - (3a+10b^2)b = 0 \Leftrightarrow a\sqrt{a+6b^2} = (3a+10b^2)b$$

$$\Leftrightarrow a^2(a+6b^2) = (3a+10b^2)^2 b^2 \Leftrightarrow a^2(a+6b^2) - (3a+10b^2)^2 b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^3 - 3a^2b^2 - 60ab^4 - 100b^6 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b^2}\right)^3 - 3\left(\frac{a}{b^2}\right)^2 - 60\frac{a}{b^2} - 100 = 0$$

Giải phương trình ta được
$$\begin{cases} \frac{a}{b^2} = 10 \\ \frac{a}{b^2} = -2 \text{ (I)} \\ \frac{a}{b^2} = -5 \text{ (I)} \end{cases}$$

Suy ra $a = 10b^2 \Rightarrow x^2 + 6 = 10(x+1) \Leftrightarrow x^2 - 10x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 + \sqrt{29} \\ x = 5 - \sqrt{29} \end{cases} (TM)$

Vậy $x = 5 + \sqrt{29}; x = 5 - \sqrt{29}$

Câu 4: (3.0 điểm) Cho đường tròn (O) và dây BC cố định không đi qua O . Điểm A thay đổi trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC là tam giác nhọn ($AB < AC$). Gọi AD, BE, CF là các đường cao và H là trực tâm của tam giác ABC . Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng BC và EF ; I là giao điểm thứ hai của KA với (O) ; M là trung điểm BC ; N là giao điểm thứ hai của AH và (O) . Chứng minh:

- Tứ giác $AIFE$ là tứ giác nội tiếp.
- Ba điểm M, H, I thẳng hàng.
- Tứ giác $INMO$ là tứ giác nội tiếp.
- Đường thẳng IN luôn đi qua một điểm cố định khi A thay đổi.

Lời giải



Suy ra $\widehat{NOM} = \frac{1}{2} \widehat{NOT}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{NIM} = \widehat{NOM}$

d) Gọi S là giao điểm của tiếp tuyến đường tròn (O) tại B và OM . Suy ra S cố định.

Ta cần chứng minh I, N, S thẳng hàng

Gọi L là giao điểm của IS và đường tròn (O)

Vì $\triangle OBS$ vuông nên $SB^2 = SM.SO = SL.SI$

Suy ra tứ giác $OMLI$ nội tiếp

Ta có tứ giác $OMLI$ và $OMNI$ cùng nội tiếp đường tròn ngoại tiếp $\triangle OMI$ và cắt (O) tại giao điểm thứ hai là L và N nên N và L trùng nhau.

Vậy I, N, S thẳng hàng hay IN đi qua S cố định.

Câu 5: (2,0 điểm)

- a) Tìm tất cả số nguyên x, y thỏa mãn $x^3 - x^2(y+1) + x(7+y) - 4 - y = 0$.
b) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy + yz + zx = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{x}{x^2+15} + \frac{y}{y^2+15} + \frac{z}{z^2+15} \leq \frac{3+x+y+z}{32}.$$

Lời giải

a) Ta có: $x^3 - x^2(y+1) + x(7+y) - 4 - y = 0$.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x^3 - x^2 + 7x - 4 - y(x^2 - x + 1) &= 0 \Leftrightarrow (x^2 - x + 1)(x - y) + 2(x^2 - x + 1) = 2(x^2 - 4x + 3) \\ \Leftrightarrow (x^2 - x + 1)(x - y + 2) &= 2(x - 1)(x - 3) \end{aligned}$$

Biện luận theo x ta có các bộ số thỏa mãn $(x, y) \in \{(0, -4); (1, 3); (3, 5)\}$.

b) Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2+15} &= \frac{x}{x^2+3+12} = \frac{x}{x^2+xy+yz+zx+12} = \frac{x}{(x+y)(x+z)+12} \leq \frac{x}{4\sqrt{(x+y)(x+z)}+8} \\ &\leq x \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{4\sqrt{(x+y)(y+z)}} + \frac{1}{8} \right) \right] \quad \left(\text{Theo bất đẳng thức } \frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right) \\ &\leq \frac{x}{16} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{z} \right) + \frac{1}{2} \right] \quad \left(\text{Theo bất đẳng thức } \frac{1}{\sqrt{ab}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\leq \frac{x}{32(x+y)} + \frac{x}{32(y+z)} + \frac{x}{32}.$$

Tương tự $\frac{y}{y^2+15} \leq \frac{y}{32(y+z)} + \frac{y}{32(z+x)} + \frac{y}{32}$

$$\frac{z}{z^2+15} \leq \frac{z}{32(z+x)} + \frac{x}{32(x+y)} + \frac{z}{32}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} & \frac{x}{x^2+15} + \frac{y}{y^2+15} + \frac{z}{z^2+15} \\ & \leq \frac{x}{32(x+y)} + \frac{x}{32(y+z)} + \frac{x}{32} + \frac{y}{32(y+z)} + \frac{y}{32(z+x)} + \frac{y}{32} + \frac{z}{32(z+x)} + \frac{x}{32(x+y)} + \frac{z}{32} \\ & \leq \frac{3+x+y+z}{32}. \end{aligned}$$

Vậy: $\frac{x}{x^2+15} + \frac{y}{y^2+15} + \frac{z}{z^2+15} \leq \frac{3+x+y+z}{32}.$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = 1.$