

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Gồm 01 trang)

* Môn thi: Toán (Chuyên)

* Ngày thi: 10/6/2022

* Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian phát đề)

ĐỀ

Câu 1: (4 điểm)

a) Chứng minh biểu thức $S = n^3(n+2)^2 + (n+1)(n^3 - 5n + 1) - 2n - 1$ chia hết cho 120, với n là số nguyên.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

$$(2x + y)(x - y) + 3(2x + y) - 5(x - y) = 22.$$

Câu 2: (4 điểm)

a) Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{a}}{a-1} + \frac{3a+5\sqrt{a}}{a\sqrt{a}-a-\sqrt{a}+1} \right) \left[\frac{(\sqrt{a}-1)^2}{4\sqrt{a}} \right] (a > 0, a \neq 1).$

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x(x^2 + y^2) - 40y = 0 \\ x^2 + 6y^2 - 40 = 0 \end{cases}.$$

Câu 3: (4 điểm)

a) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 5x + m - 2 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức: $\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} = \frac{3}{2}.$

b) Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$a^2b + b^2c + c^2a \geq \frac{9a^2b^2c^2}{1 + 2a^2b^2c^2}.$$

Câu 4: (4 điểm) Cho đường tròn tâm O có đường kính $MN = 2R$. Vẽ đường kính AB của đường tròn (O) (A khác M và A khác N). Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại N cắt các đường thẳng MA, MB lần lượt tại các điểm I, K .

a) Chứng minh tứ giác $ABKI$ nội tiếp.

b) Khi đường kính AB quay quanh tâm O thỏa mãn điều kiện đề bài, xác định vị trí của đường kính AB để tứ giác $ABKI$ có diện tích nhỏ nhất.

Câu 5: (4 điểm) Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB , điểm C thuộc nửa đường tròn (C khác A và B). Gọi I là điểm chính giữa cung AC , E là giao điểm của AI và BC . Gọi K là giao điểm của AC và BI .

a) Chứng minh rằng $EK \perp AB$.

b) Gọi F là điểm đối xứng với K qua I . Chứng minh AF là tiếp tuyến của (O) .

c) Nếu $\sin \widehat{BAC} = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Gọi H là giao điểm của EK và AB . Chứng minh

$$KH(KH + 2HE) = 2HE \cdot KE.$$

--- HẾT ---

Câu 1: (4 điểm)

a) Chứng minh biểu thức $S = n^3(n+2)^2 + (n+1)(n^3 - 5n + 1) - 2n - 1$ chia hết cho 120, với n là số nguyên.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

$$(2x+y)(x-y) + 3(2x+y) - 5(x-y) = 22.$$

Câu 2: (4 điểm)

a) Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{a}}{a-1} + \frac{3a+5\sqrt{a}}{a\sqrt{a}-a-\sqrt{a}+1} \right) \left[\frac{(\sqrt{a}-1)^2}{4\sqrt{a}} \right] (a > 0, a \neq 1)$

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x(x^2 + y^2) - 40y = 0 \\ x^2 + 6y^2 - 40 = 0 \end{cases}$$

Câu 3: (4 điểm)

a) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 5x + m - 2 = 0$ có hai nghiệm dương phân

biệt x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức: $\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} = \frac{3}{2}$.

b) Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$a^2b + b^2c + c^2a \geq \frac{9a^2b^2c^2}{1 + 2a^2b^2c^2}.$$

Câu 4: (4 điểm) Cho đường tròn tâm O có đường kính $MN = 2R$. Vẽ đường kính AB của đường tròn (O) (A khác M và A khác N). Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại N cắt các đường thẳng MA, MB lần lượt tại các điểm I, K .

a) Chứng minh tứ giác $ABKI$ nội tiếp.

b) Khi đường kính AB quay quanh tâm O thỏa mãn điều kiện đề bài, xác định vị trí của đường kính AB để tứ giác $ABKI$ có diện tích nhỏ nhất.

Câu 5: (4 điểm) Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB , điểm C thuộc nửa đường tròn (C khác A và B). Gọi I là điểm chính giữa cung AC , E là giao điểm của AI và BC . Gọi K là giao điểm của AC và BI .

a) Chứng minh rằng $EK \perp AB$.

b) Gọi F là điểm đối xứng với K qua I . Chứng minh AF là tiếp tuyến của (O) .

c) Nếu $\sin \widehat{BAC} = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Gọi H là giao điểm của EK và AB . Chứng minh $KH(KH + 2HE) = 2HE \cdot KE$.

---Hết---

HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu 1:

a) Ta có

$$\begin{aligned} S &= n(n^4 + 5n^3 + 5n^2 - 5n - 6) \\ &= n[(n^2 - 1)(n^2 + 6) + 5n(n^2 - 1)] \\ &= n(n^2 - 1)(n^2 + 5n + 6) \\ &= n(n - 1)(n + 1)(n + 2)(n + 3) \\ &= (n - 1)n(n + 1)(n + 2)(n + 3) \end{aligned}$$

Ta thấy S là tích của 5 số nguyên liên tiếp và $120 = 3.8.5$

+) Trong 5 số nguyên liên tiếp có một số chia hết cho 3 nên tích cũng chia hết cho 3.

+) Trong 5 số nguyên liên tiếp sẽ có 2 số chẵn liên tiếp có dạng $2k + 2$ với $k \in \mathbb{Z}$. Do đó tích của chúng có dạng $4k(k + 1)$

mà $k(k + 1) : 2 \Rightarrow 4k(k + 1) : 8$

+) Trong 5 số nguyên liên tiếp sẽ có một số chia hết cho 5 nên tích của chúng cũng chia hết cho 5.

Vậy S chia hết cho 120.

b)

$$(2x + y)(x - y) + 3(2x + y) - 5(x - y) = 22.$$

$$\Leftrightarrow (2x + y)(x - y + 3) - 5(x - y + 3) = 7 \Leftrightarrow (2x + y - 5)(x - y + 3) = 7 \text{ Vì}$$

$$7 = 1.7 = 7.1 = (-1) \cdot (-7) = (-7) \cdot (-1) \text{ nên ta có 4 trường hợp xảy ra}$$

$$1: \begin{cases} 2x + y - 5 = 1 \\ x - y + 3 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{3} \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases} \text{ (loại)}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} 2x + y - 5 = 7 \\ x - y + 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{3} \\ y = \frac{16}{3} \end{cases} \text{ (loại)}$$

$$\text{TH3: } \begin{cases} 2x + y - 5 = -1 \\ x - y + 3 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 8 \end{cases}$$

$$\text{TH4: } \begin{cases} 2x + y - 5 = -7 \\ x - y + 3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm nguyên là $(-2; 8)$ và $(-2; 2)$

Câu 2:

$$a) P = \left[\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)}{(a - 1)(\sqrt{a} - 1)} + \frac{3a + 5\sqrt{a}}{(a - 1)(\sqrt{a} - 1)} \right] \cdot \left[\frac{(\sqrt{a} - 1)^2}{4\sqrt{a}} \right]$$

$$= \left[\frac{4a + 4\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-1)^2(\sqrt{a}+1)} \right] \cdot \left[\frac{(\sqrt{a}-1)^2}{4\sqrt{a}} \right] = \frac{4\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-1)^2} \cdot \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{4\sqrt{a}} = 1 \text{ b)}$$

$$\begin{cases} x^3 + xy^2 - 40y = 0 \\ x^2 + 6y^2 - 40 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + xy^2 - (x^2 + 6y^2)y = 0 & (1) \\ x^2 + 6y^2 = 40 & (2) \end{cases}$$

$$x^3 + xy^2 - (x^2 + 6y^2)y = 0 \Leftrightarrow x^3 + xy^2 - x^2y - 6y^3 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2y + x^2y - 2xy^2 + 3xy^2 - 6y^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2y)(x^2 + xy + 3y^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x^2 + xy + 3y^2 = 0 \end{cases} \text{+) Trường hợp 1:}$$

$$x^2 + xy + 3y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{11y^2}{4} = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$$

Vô nghiệm vì $x = y = 0$ không thỏa mãn phương trình (2).

+) Trường hợp 2: $x = 2y$ thay vào phương trình (2) ta có:

$$4y^2 + 6y^2 = 40 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = -2 \end{cases}.$$

Ta có $y = 2 \Rightarrow x = 4; y = -2 \Rightarrow x = -4$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm $(x; y)$ là $(2; 4)$ và $(-2; -4)$.

Câu 3:

a) Theo hệ thức Vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 x_2 = m - 2 \end{cases} \quad (1).$

Để phương trình đã cho có hai nghiệm dương phân biệt thì

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S = x_1 + x_2 > 0 \\ P = x_1 x_2 > 0 \end{cases}$$

Thay (1) vào ta được $\begin{cases} (-5)^2 - 4(m-2) > 0 \\ 5 > 0 \\ m-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{33}{4} \\ m > 2 \end{cases}$

Ta có $\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}}{\sqrt{x_1 x_2}} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}) = 3\sqrt{x_1 x_2}$

$$\Rightarrow 4(x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2}) = 9x_1 x_2.$$

Thay (1) vào ta được:

$$\Rightarrow 4(5 + 2\sqrt{m-2}) = 9(m-2) \Rightarrow 9(m-2) - 8\sqrt{m-2} - 20 = 0. \quad (2)$$

t $t = \sqrt{m-2}, t \geq 0$ khi đó phương trình (2) trở thành phương trình

$$9t^2 - 8t - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \quad (n) \\ t = -\frac{10}{9} \quad (l) \end{cases} \text{ Với } t = 2 \text{ ta có } \sqrt{m-2} = 2 \Leftrightarrow m-2 = 4 \Leftrightarrow m = 6 \text{ thỏa mãn điều kiện.}$$

Vậy $m = 6$ thỏa yêu cầu bài toán.

b) Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành

$$(a^2b + b^2c + c^2a) \left(2 + \frac{1}{a^2b^2c^2} \right) \geq 9$$

$$\Leftrightarrow 2(a^2b + b^2c + c^2a) + \frac{1}{ab^2} + \frac{1}{bc^2} + \frac{1}{ca^2} \geq 9.$$

Mặt khác sử dụng bất đẳng thức Cô-si bộ ba số, ta có

$$a^2b + a^2b + \frac{1}{ab^2} \geq 3\sqrt[3]{a^2b \cdot a^2b \cdot \frac{1}{ab^2}} = 3a$$

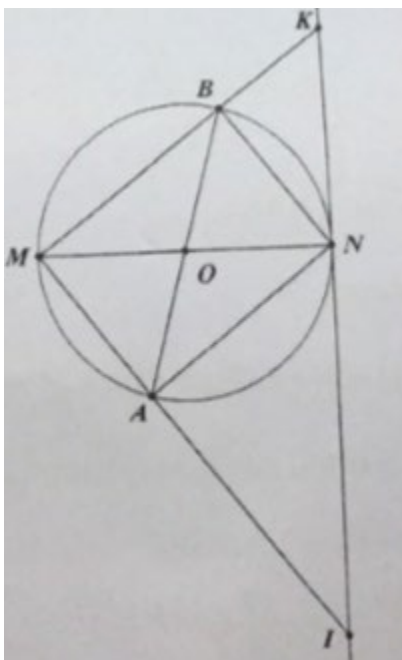
$$b^2c + b^2c + \frac{1}{bc^2} \geq 3\sqrt[3]{b^2c \cdot b^2c \cdot \frac{1}{bc^2}} = 3b.$$

$$c^2a + c^2a + \frac{1}{ca^2} \geq 3\sqrt[3]{c^2a \cdot c^2a \cdot \frac{1}{ca^2}} = 3c$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại vế theo vế, ta được $2(a^2b + b^2c + c^2a) + \frac{1}{ab^2} + \frac{1}{bc^2} + \frac{1}{ca^2} \geq 3(a + b + c) = 9.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1.$

Câu 4:



a) Ta có $\widehat{MBA} = \widehat{MNA}$ (cùng chắn cung MA)

Mà $\widehat{MNA} = \widehat{MIN}$ (cùng phụ với góc $\widehat{AMN}$)

Suy ra $\widehat{MBA} = \widehat{MIN}$. Mà $\widehat{MBA} + \widehat{ABK} = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

Nên $\widehat{MIN} + \widehat{ABK} = 180^\circ$ suy ra tứ giác $ABKI$ nội tiếp vì có tổng hai góc đối bằng 180° .

b) Ta có $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Xét tam giác vuông MIK có MN là đường cao

Suy ra $MN^2 = NK \cdot NI$.

Ta có $2S_{ABKI} = 2S_{\triangle MIK} - 2S_{\triangle MAB}$

$= 2R \cdot IK - MA \cdot MB = 2R \cdot (IN + NK) - MA \cdot MB$ Áp dụng bất đẳng thức cô-si ta có

$$\text{Và } 2HE \cdot KE = 2 \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + 1 \right) HK \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} HK = (\sqrt{3} + 6) HK^2.$$

$$\text{Suy ra } KH(KH + 2HE) = 2HE \cdot KE.$$

Ghi chú : Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án nhưng đúng thì vẫn cho đủ số điểm từng phần như hướng dẫn quy định.

---Hết---