

Câu I. (2,0 điểm) Cho biểu thức:

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} - \frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6} \right) : \frac{1}{x+2\sqrt{x}-3} \quad (x \geq 0; x \neq 1; x \neq 4).$$

1. Rút gọn biểu thức A .

2. Tìm tất cả các giá trị của x để $A > -2$.

Câu II. (2,0 điểm)

1. Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = (m-2)x + 2m - 1$ (với m là tham số) và điểm $A(-1; 2)$. Tìm tất cả các giá trị của m để khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng (d) đạt giá trị lớn nhất.

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x-y-1) \cdot (x^2+y^2+1) = x^2+y^2-x+y+3 \\ \sqrt{x+6} + \sqrt{y+3} = -x^2+2x+8 \end{cases}$$

Câu III. (4,0 điểm) Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có các góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Các đường cao AK, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H và cắt đường tròn $(O; R)$ tại các điểm lần lượt là M, N, P (M khác A , N khác B , P khác C).

1. Chứng minh $EF \parallel PN$.

2. Chứng minh diện tích tứ giác $AEOF$ bằng $\frac{EF \cdot R}{2}$.

3. Tính giá trị của biểu thức $\frac{AM}{AK} + \frac{BN}{BE} + \frac{CP}{CF}$.

4. Gọi S và Q là chân đường vuông góc kẻ từ điểm K đến các cạnh AB, AC . Đường thẳng QS cắt BC tại G , đường thẳng GA cắt đường tròn $(O; R)$ tại điểm J (J khác A). Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BCQS$. Chứng minh ba điểm I, K, J thẳng hàng.

Câu IV. (1,0 điểm) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn:

$$x^4 - 6x^3 + 18x^2 - y^2 - 32x + 4y + 20 = 0.$$

Câu V. (1,0 điểm) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + ab - 2bc - 2ca = 0$.

Chứng minh:
$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2} + \frac{c^2}{(a+b-c)^2} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b} \geq 3.$$

--- HẾT ---

Thí sinh không được sử dụng tài liệu, người coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

Người coi thi số 1:.....Người coi thi số 2:.....

ĐỀ CHÍNH THỨC

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN (ĐỀ CHUYÊN)

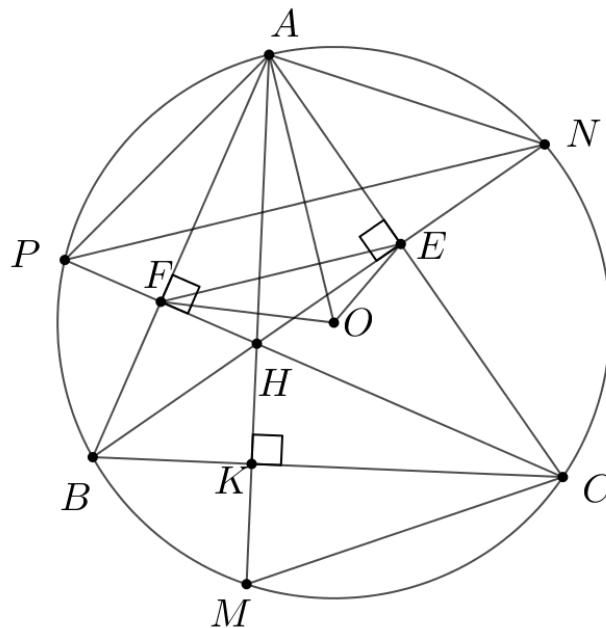
Ghi chú:

- Điểm toàn bài không làm tròn.
- Các cách giải khác mà đúng cho điểm tương đương.

Nội dung	Điểm
Câu 1 (2,0 điểm) . Cho biểu thức: $A = \left(\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} - \frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6} \right) : \frac{1}{x+2\sqrt{x}-3} \quad (x \geq 0; x \neq 4; x \neq 1).$	
1. (1,5 điểm) Rút gọn biểu thức A .	
$A = \frac{(\sqrt{x}-2)^2 - (\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3) - 9 + x}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)} : \frac{1}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}$	0,5
$= \frac{(\sqrt{x}-2)^2 - (x-9) - 9 + x}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)} : \frac{1}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}$	0,25
$= \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)} : \frac{1}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}$	0,25
$= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} \cdot (\sqrt{x}+3) \cdot (\sqrt{x}-1)$	0,25
$= (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1) = x - 3\sqrt{x} + 2$	0,25
2. (0,5 điểm) Tìm tất cả các giá trị của x để $A > -2$.	
$A = x - 3\sqrt{x} + 2 > -2 \quad (\forall x \geq 0; x \neq 4; x \neq 1).$ $\Leftrightarrow x - 3\sqrt{x} + 4 > 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{7}{4} > 0 \quad (\forall x \geq 0; x \neq 4; x \neq 1).$	0,25
Vậy $A > -2$ với $\forall x \geq 0; x \neq 4; x \neq 1$	0,25
Câu 2 (2,0 điểm).	
1. (1,0 điểm) Cho đường thẳng (d) có phương trình $y = (m-2)x + 2m - 1$ và điểm $A(-1; 2)$. Tìm tất cả các giá trị của m để khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng (d) đạt giá trị lớn nhất.	
Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định nằm trên đường thẳng d $\Leftrightarrow y_0 = (m-2)x_0 + 2m - 1$ có nghiệm với $\forall m$ $\Leftrightarrow m(x_0 + 2) - 2x_0 - y_0 - 1 = 0 \quad (\forall m)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 2 = 0 \\ -2x_0 - y_0 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -2 \\ y_0 = 3 \end{cases} \Rightarrow M(-2; 3)$	0,25
Gọi H là hình chiếu của A trên $d \Rightarrow AH \leq AM$ Khoảng cách AH lớn nhất là AM khi $H \equiv M \Leftrightarrow AM \perp d$	0,25
Phương trình đường thẳng $AM: y = -x + 1$	0,25
$AM \perp d \Leftrightarrow (m-2) \cdot (-1) = -1 \Leftrightarrow m = 3.$	0,25
2. (1,0 điểm) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x-y-1) \cdot (x^2+y^2+1) = x^2+y^2-x+y+3 & (1) \\ \sqrt{x+6} + \sqrt{y+3} = -x^2+2x+8 & (2) \end{cases}$	

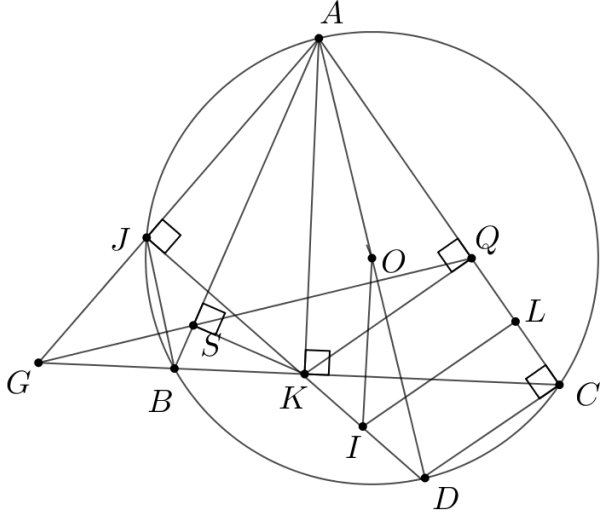
ĐK: $\begin{cases} x \geq -6 \\ y \geq -3 \end{cases}$	0,25
$(x-y-1) \cdot (x^2+y^2+1) = x^2+y^2-x+y+3$ $\Leftrightarrow (x-y-2) \cdot (x^2+y^2+2) = 0$ $\Leftrightarrow x-y-2=0 \quad (x^2+y^2+2 > 0 \quad \forall x, y)$	0,25
Thay $y = x-2$ vào phương trình (2) $\sqrt{x+6} + \sqrt{x+1} = -x^2 + 2x + 8, \quad (x \geq -1)$ $\Leftrightarrow \sqrt{x+6} - 3 + \sqrt{x+1} - 2 + x^2 - 2x - 3 = 0$ $\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x+6}+3} + \frac{x-3}{\sqrt{x+1}+2} + (x-3)(x+1) = 0$	0,25
$\Leftrightarrow (x-3) \left(\frac{1}{\sqrt{x+6}+3} + \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} + x+1 \right) = 0$ $\Leftrightarrow x=3 \quad \left(\text{do } \frac{1}{\sqrt{x+6}+3} + \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} + x+1 > 0, \forall x \geq -1 \right)$ $x=3 \Rightarrow y=1.$ Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (3; 1)$	0,25

Câu III. (4 điểm) Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có các góc nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Các đường cao AK, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H và cắt đường tròn $(O; R)$ tại các điểm lần lượt là M, N, P (M khác A , N khác B , P khác C).



1. (1,0 điểm) Chứng minh $EF \parallel PN$.

$\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^\circ \Rightarrow$ tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn đường kính BC	0,25
$\Rightarrow \widehat{CBE} = \widehat{CFE}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{EC}$)	0,25
Mà $\widehat{CBE} = \widehat{CPN}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{CN}$)	0,25
$\Rightarrow \widehat{CFE} = \widehat{CPN} \Rightarrow EF \parallel PN$	0,25

2. (1,0 điểm) Chứng minh diện tích tứ giác $AEOF$ bằng $\frac{EF.R}{2}$.	
$\widehat{ABN} = \widehat{ACP}$ (cùng phụ với $\widehat{BAC}$) $\Rightarrow AN = AP$	0,25
$ON = OP = R$ $\Rightarrow A, O$ nằm trên đường trung trực của PN $\Rightarrow AO \perp PN$	0,25
Mà $EF \parallel PN \Rightarrow AO \perp EF \Rightarrow S_{AEOF} = \frac{EF.R}{2}$	0,25
3. (1,0 điểm) Tính giá trị của biểu thức $\frac{AM}{AK} + \frac{BN}{BE} + \frac{CP}{CF}$.	
$\widehat{BAM} = \widehat{BCM}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{BM}$) $\widehat{BAM} = \widehat{BCF}$ (cùng phụ với $\widehat{ABC}$) $\Rightarrow \widehat{BCF} = \widehat{BCM}$ ΔMCH có CK vừa là đường phân giác vừa là đường cao $\Rightarrow \Delta MCH$ cân tại $C \Rightarrow K$ là trung điểm của MH	0,25
$\frac{AM}{AK} + \frac{BN}{BE} + \frac{CP}{CF} = \frac{AK + KM}{AK} + \frac{BE + EN}{BE} + \frac{CF + FP}{CF}$ $= 3 + \frac{KM}{AK} + \frac{EN}{BE} + \frac{FP}{CF}$	0,25
$\frac{KM}{AK} = \frac{KH}{AK} = \frac{S_{\Delta BHC}}{S_{\Delta ABC}}$ Chứng minh tương tự: $\frac{EN}{BE} = \frac{S_{\Delta AHC}}{S_{\Delta ABC}}; \frac{FP}{CF} = \frac{S_{\Delta AHB}}{S_{\Delta ABC}}$	0,25
$\frac{AM}{AK} + \frac{BN}{BE} + \frac{CP}{CF} = 3 + \frac{S_{\Delta BHC} + S_{\Delta AHC} + S_{\Delta AHB}}{S_{\Delta ABC}} = 3 + 1 = 4$.	0,25
4. (1,0 điểm) Gọi S và Q là chân đường vuông góc kẻ từ điểm K đến các cạnh AB, AC . Đường thẳng QS cắt BC tại G , đường thẳng GA cắt đường tròn $(O; R)$ tại điểm J (J khác A). Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BCQS$. Chứng minh ba điểm I, K, J thẳng hàng.	
	
$\widehat{ASK} + \widehat{AQK} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên $ASKQ$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ASQ} = \widehat{AKQ}$	0,25

$\widehat{AKQ} = \widehat{BCQ}$ (cùng phụ với $\widehat{CKQ}$) Do đó $\widehat{ASQ} = \widehat{BCQ}$ Suy ra $BSQC$ là tứ giác nội tiếp. $\Rightarrow \widehat{GBS} = \widehat{GQC}$ $\Delta GBS \sim \Delta GQC (g.g) \Rightarrow \frac{GB}{GQ} = \frac{GS}{GC} \Rightarrow GB.GC = GS.GQ (1)$	
Vì $ASKQ$ là tứ giác nội tiếp nên: $\widehat{GQK} = \widehat{BAK}$ Mà $\widehat{BAK} = \widehat{GKS}$ (cùng phụ với $\widehat{SBK}$) nên $\widehat{GQK} = \widehat{GKS}$ $\Delta GQK \sim \Delta GKS (g.g) \Rightarrow \frac{GQ}{GK} = \frac{GK}{GS} \Rightarrow GK^2 = GS.GQ (2)$ Từ (1) và (2) $\Rightarrow GK^2 = GB.GC$ $\widehat{GJB} = \widehat{GCA} \Rightarrow \Delta GJB \sim \Delta GCA \Rightarrow \frac{GJ}{GC} = \frac{GB}{GA}$ $\Rightarrow GJ.GA = GB.GC$ $\Rightarrow GK^2 = GJ.GA \Rightarrow \frac{GK}{GA} = \frac{GJ}{GK}$ $\Rightarrow \Delta GKJ \sim \Delta GAK \Rightarrow \widehat{GJK} = \widehat{GKA} = 90^\circ$ $\Rightarrow AJ \perp JK$	0,25
JK cắt (O) tại D (D khác K) thì AD là đường kính của (O) . Gọi I là trung điểm KD , L là trung điểm QC . Khi đó OI là đường trung bình của $\Delta AKD \Rightarrow OI \parallel AK \Rightarrow OI \perp BC$ Mà $OB = OC$ nên OI là trung trực BC (3)	0,25
Vì $KQ \parallel DC$ (cùng vuông góc AC) nên $KQCD$ là hình thang. $\Rightarrow IL$ là đường trung bình của hình thang $KQCD$ $\Rightarrow IL \parallel KQ \Rightarrow IL \perp QC$ $\Rightarrow IL$ là trung trực của QC (4) Từ (3) và (4) $\Rightarrow I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BSQC$ Vậy I, K, J thẳng hàng.	0,25
Câu IV. (1 điểm) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $x^4 - 6x^3 + 18x^2 - y^2 - 32x + 4y + 20 = 0.$	
$x^4 - 6x^3 + 18x^2 - y^2 - 32x + 4y + 20 = 0$ $\Leftrightarrow x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 32x + 24 = y^2 - 4y + 4$ $\Leftrightarrow (x-2)^2(x^2 - 2x + 6) = (y-2)^2$	0,25
Với $y = 2 \Rightarrow x = 2$ Với $y \neq 2$ ta có $(y-2)^2$ và $(x-2)^2$ là số chính phương khác 0 nên $x^2 - 2x + 6$ là số chính phương. Đặt $x^2 - 2x + 6 = m^2$ ($m \in \mathbb{N}^*$)	0,25

$(x-1)^2 + 5 = m^2$ $\Leftrightarrow (x-1-m)(x-1+m) = -5$	
$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1+m=5 \\ x-1-m=-1 \end{cases} \quad (x-1+m > x-1-m)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x-1+m=1 \\ x-1-m=-5 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ m=3 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ m=3 \end{cases}$	0,25
$x=3 \Rightarrow (y-2)^2 = 9 \Rightarrow y=5$ hoặc $y=-1$ $x=-1 \Rightarrow (y-2)^2 = 81 \Rightarrow y=11$ hoặc $y=-7$ Vậy các bộ $(x;y)$ nguyên thỏa yêu cầu bài toán là $(2;2), (3;5), (3;-1), (-1;11), (-1;-7)$. Câu V. (1 điểm) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn thỏa mãn: $a^2 + b^2 + c^2 + ab - 2bc - 2ca = 0$. Chứng minh: $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2} + \frac{c^2}{(a+b-c)^2} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b} \geq 3$.	0,25
$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2} + \frac{c^2}{(a+b-c)^2} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{c^2}{a^2 + b^2} + \frac{c^2}{(a+b-c)^2} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b} \geq 2$ Đặt $x = \frac{a}{c}, y = \frac{b}{c} \quad (x, y > 0)$ $a^2 + b^2 + c^2 + ab - 2bc - 2ca = 0$ $\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 1 + xy - 2x - 2y = 0 \Leftrightarrow (x+y-1)^2 = xy$	0,25
Áp dụng bất đẳng thức Cô-si: $xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}$ Do đó: $(x+y-1)^2 \leq \frac{(x+y)^2}{4} \Rightarrow [3(x+y)-2] \cdot [2-(x+y)] \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq x+y \leq 2$	0,25
$P = \frac{c^2}{a^2 + b^2} + \frac{c^2}{(a+b-c)^2} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b}$ $= \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{(x+y-1)^2} + \frac{\sqrt{xy}}{x+y} = \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{xy} + \frac{\sqrt{xy}}{x+y}$ $= \left(\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{2xy} \right) + \left(\frac{1}{2xy} + \frac{\sqrt{xy}}{x+y} \right) \geq \frac{4}{(x+y)^2} + 2\sqrt{\frac{1}{2(x+y)\sqrt{xy}}}$	0,25
$P \geq \frac{4}{2^2} + 2\sqrt{\frac{1}{2 \cdot 2}} = 2$ Dấu bằng xảy ra khi $x = y = 1 \Leftrightarrow a = b = c$	0,25