

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN – CHUYÊN
Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1 (2,0 điểm)

Cho phương trình $x^2 - (2m-1)x + m^2 - m - 2 = 0$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 - 5x_1x_2 = 10m + 15$.

Câu 2 (2,0 điểm)

1) Giải phương trình: $x^2 + x + 5 = 3\sqrt{x^3 + x^2 - x + 2}$.

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 + 4x - 5y + 3 = 0 \\ x^2 - 10y + 9 + 2\sqrt{x-1} = 0 \end{cases}$$

Câu 3 (2,0 điểm)

1) Cho hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài bằng 47cm, chiều rộng bằng 43cm. Chứng minh rằng trong số 2022 điểm bất kì nằm trong hình chữ nhật $ABCD$ luôn tìm được hai điểm mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn hoặc bằng $\sqrt{2}$ cm.

2) Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn: $5x^2 + 3y^2 = 20x - 24y + 477$.

Câu 4 (1,0 điểm)

Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + 2b + 3c = 24abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2b}{a\sqrt{16b^2+1}} + \frac{3c}{2b\sqrt{36c^2+1}} + \frac{a}{3c\sqrt{4a^2+1}} \geq \frac{3}{2}.$$

Câu 5 (3,0 điểm)

Cho đường tròn $(O; R)$ và hai điểm P, Q nằm ngoài (O) sao cho góc POQ vuông, PQ không cắt (O) . Kẻ hai tiếp tuyến PA, PB với đường tròn (O) (A, B là hai tiếp điểm; tia PA nằm giữa hai tia PQ và PO). Hai cát tuyến PDC, QEC thay đổi của (O) cùng đi qua C (D nằm giữa P và C ; E nằm giữa Q và C). Tia PE cắt đường tròn tại điểm thứ hai F ($F \neq E$). H là giao điểm của AB và OP . Chứng minh rằng:

1) Tích $PE \cdot PF$ không đổi.

2) $\widehat{AHE} = \widehat{AHF}$.

3) Đường tròn ngoại tiếp tam giác PDF luôn đi qua một điểm cố định.

----- Hết -----

Câu 1.

Cho phương trình $x^2 - (2m-1)x + m^2 - m - 2 = 0$ với m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 - 5x_1x_2 = 10m + 15$.

Giải

$$\Delta = (2m-1)^2 - 4(m^2 - m - 2) = 4m^2 - 4m + 1 - 4m^2 + 4m + 8 = 9 > 0$$

Suy ra phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1 = m+1; x_2 = m-2$.

$$\text{Có } x_1^3 + x_2^3 - 5x_1x_2 = 10m + 15 \Leftrightarrow (m+1)^3 + (m-2)^3 - 5(m+1)(m-2) - 10m - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^3 + 3m^2 + 3m + 1 + m^3 - 6m^2 + 12m - 8 - 5m^2 + 10 - 10m - 15 = 0 \Leftrightarrow m^3 - 4m^2 + 5m - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^3 - 3m^2 - m^2 + 3m + 2m - 6 = 0 \Leftrightarrow m^2(m-3) - m(m-3) + 2(m-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (m-3)(m^2 - m + 2) = 0 \Leftrightarrow m = 3.$$

Vậy $m = 3$.

Câu 2.

$$1) \text{ Giải phương trình: } x^2 + x + 5 = 3\sqrt{x^3 + x^2 - x + 2}.$$

$$2) \text{ Giải hệ phương trình: } \begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 + 4x - 5y + 3 = 0 & (1) \\ x^2 - 10y + 9 + 2\sqrt{x-1} = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải

1) Phương trình đã cho tương đương với:

$$(x^2 - x + 1) + 2(x + 2) = 3\sqrt{(x+2)(x^2 - x + 1)}. \text{ Điều kiện: } x \geq -2$$

$$\text{Đặt } u = \sqrt{x^2 - x + 1}, v = \sqrt{x+2}; u, v \geq 0.$$

$$\text{Phương trình trở thành: } u^2 + 2v^2 = 3uv \Leftrightarrow u^2 - 3uv + 2v^2 = 0 \Leftrightarrow (u-v)(u-2v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = v \\ u = 2v \end{cases}$$

$$\text{Với } u = v \text{ thì } x^2 - x + 1 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$\text{Với } u = 2v \text{ thì } x^2 - x + 1 = 4(x+2) \Leftrightarrow x^2 - 5x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{53}}{2}.$$

2) Điều kiện: $x \geq 1$

$$(1) \Leftrightarrow (x+y+3)(x-2y+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x-3 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Với } y = -x-3, \text{ thế vào (2) ta được: } x^2 + 10x + 39 + 2\sqrt{x-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+5)^2 + 14 + 2\sqrt{x-1} = 0: \text{ vô nghiệm.}$$

$$\text{Với } y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \text{ thế vào (2) ta được: } x^2 - 5x + 4 + 2\sqrt{x-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = x - 2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow (x-2)^2 = (\sqrt{x-1} - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = \sqrt{x-1} - 1 \\ x-2 = 1 - \sqrt{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = x-1 & (3) \\ \sqrt{x-1} = 3-x & (4) \end{cases}$$

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1}=0 \\ \sqrt{x-1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \text{ (t/m)} \\ x=2 \text{ (t/m)} \end{cases}.$$

$$(4) \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x-1 = x^2 - 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \text{ (t/m)}$$

Với $x = 1$ thì $y = 1$

Với $x = 2$ thì $y = \frac{3}{2}$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}; \begin{cases} x=2 \\ y=\frac{3}{2} \end{cases}.$

Câu 3.

1) Cho hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài bằng 47 cm , chiều rộng bằng. Chứng minh rằng trong trong số 2022 điểm bất kì nằm trong hình chữ nhật $ABCD$ luôn tìm được hai điểm mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn hoặc bằng $\sqrt{2} \text{ cm}$.

1) Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn $5x^2 + 3y^2 = 20x - 24y + 477$.

Giải

1) Chia hình chữ nhật $ABCD$ thành 2021 hình vuông nhỏ có cạnh bằng 1 cm .

Khi lấy 2022 điểm bất kì trong hình chữ nhật $ABCD$ thì chúng thuộc 2021 hình vuông nhỏ trên.

Theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại 2 điểm thuộc cùng một hình vuông nhỏ.

Khi đó khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn đường chéo hình vuông nhỏ là $\sqrt{2} \text{ cm}$.

$$2) 5x^2 + 3y^2 = 20x - 24y + 477 \Leftrightarrow 5x^2 - 20x + 20 + 3y^2 + 24y + 48 = 545$$

$$\Leftrightarrow 5(x-2)^2 + 3(y+4)^2 = 545$$

Do $5(x-2)^2$ và 545 cùng chia hết cho 5 nên $3(y+4)^2$ chia hết cho 5.

Mà $(3,5)=1$ nên $3(y+4)^2 : 5$ hay $(y+4) : 5$

$$\text{Có } 3(y+4)^2 \leq 545 \Rightarrow (y+4)^2 \leq \frac{545}{3} \Rightarrow y+4 \leq 13$$

Từ đó $y = 1$ hoặc $y = 6$.

Với $y = 1$ thì $(x-2)^2 = 94$: loại

Với $y = 6$ thì $(x-2)^2 = 49 \Rightarrow x = 9$

Vậy cặp $(x; y)$ cần tìm là $(9; 6)$.

Câu 4.

Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + 2b + 3c = 24abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{2b}{a\sqrt{16b^2+1}} + \frac{3c}{2b\sqrt{36c^2+1}} + \frac{a}{3c\sqrt{4a^2+1}} \geq \frac{3}{2}.$$

Giải

$$\text{Có } a + 2b + 3c = 24abc \Leftrightarrow \frac{1}{2ab} + \frac{1}{6bc} + \frac{1}{3ca} = 4.$$

Đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{2b}, z = \frac{1}{3c}$. Khi đó $xy + yz + zx = 4$.

$$\text{Bất đẳng thức trở thành: } P = \frac{x}{\sqrt{y^2 + 4}} + \frac{y}{\sqrt{z^2 + 4}} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + 4}} \geq \frac{3}{2}.$$

$$\text{Có: } y^2 + 4 = y^2 + xy + yz + zx = (x + y)(y + z)$$

$$z^2 + 4 = z^2 + xy + yz + zx = (y + z)(z + x)$$

$$x^2 + 4 = x^2 + xy + yz + zx = (z + x)(x + y)$$

$$\Rightarrow P = \frac{x}{\sqrt{(x + y)(y + z)}} + \frac{y}{\sqrt{(y + z)(z + x)}} + \frac{z}{\sqrt{(z + x)(x + y)}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta được:

$$P \geq \frac{2x}{x + 2y + z} + \frac{2y}{x + y + 2z} + \frac{2z}{2x + y + z}$$

$$P \geq \frac{2x^2}{x^2 + 2yx + zx} + \frac{2y^2}{xy + y^2 + 2zy} + \frac{2z^2}{2xz + yz + z^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki dạng phân thức:

$$P \geq \frac{2(x + y + z)^2}{(x + y + z)^2 + xy + yz + zx}$$

$$\text{Lại có } xy + yz + zx \leq \frac{(x + y + z)^2}{3} \Rightarrow P \geq \frac{2(x + y + z)^2}{(x + y + z)^2 + \frac{(x + y + z)^2}{3}} = \frac{3}{2}.$$

Câu 5.

Cho đường tròn $(O; R)$ và hai điểm P, Q nằm ngoài (O) sao cho góc POQ vuông, PQ không cắt (O) . Kẻ hai tiếp tuyến PA, PB với đường tròn (O) (A, B là hai tiếp điểm; tia PA nằm giữa hai tia PQ và PO). Hai cát tuyến PDC, QEC thay đổi của (O) cùng đi qua C (D nằm giữa P và C ; E nằm giữa Q và C). Tia PE cắt đường tròn tại điểm thứ hai F ($F \neq E$). H là giao điểm của AB và OP . Chứng minh rằng:

- 1) Tích $PE \cdot PF$ không đổi.
- 2) $\widehat{AHE} = \widehat{AHF}$.
- 3) Đường tròn ngoại tiếp tam giác PDF luôn đi qua một điểm cố định.

Giải


$$\Delta PAF \sim \Delta PEA(g.g) \Rightarrow \frac{PA}{PE} = \frac{PF}{PA} \Rightarrow PE.PF = PA^2$$
$$\Rightarrow PE.PF = OP^2 - R^2 : \text{không đổi.}$$

2)

Do đó $PE.PF = PH.PO \Rightarrow \Delta PHF \sim \Delta PEO$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{PHF} = \widehat{OEF} = \widehat{OFE} = \widehat{OHE} . \text{ Mà } AH \perp OP \text{ nên } \widehat{AHE} = \widehat{AHF} .$$

3)

$$\Delta PFQ' \sim \Delta PQE \text{ (g.g)} \Rightarrow PQ'.PQ = PE.PF = OP^2 - R^2$$
$$\Rightarrow PQ' = \frac{OP^2 - R^2}{PO} : \text{không đổi} \Rightarrow Q' \text{ cố định.}$$
$$\Rightarrow PC.PD = PQ.PQ' \Rightarrow \Delta PQ'D \sim \Delta PCQ \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{PQ'D} = \widehat{C}$$

Mà $\widehat{PFD} = \widehat{C}$ nên $\widehat{PFD} = \widehat{PQ'D} \Rightarrow PDFQ'$ là tứ giác nội tiếp hay đường tròn ngoại tiếp ΔPDF luôn đi qua điểm Q' cố định.