

Câu 1. (1,75 điểm)

1) Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right) : (a + b)$ (với $a \geq 0, b \geq 0, a \neq b$).

2) Giải phương trình $\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} + \frac{1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{2}{3}$.

Câu 2. (1,5 điểm)

1) Tìm đa thức bậc ba $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, với a, b, c là các hệ số thực. Biết $P(x)$ chia hết cho $(x-1)$, $P(x)$ chia cho $(x-2)$ và $(x-3)$ đều có dư là 6.

2) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn bất đẳng thức $5x^2 + 3y^2 + 4xy - 2x + 8y + 8 \leq 0$.

Câu 3. (2,25 điểm)

Cho phương trình $x^4 - 4(4m-1)x^2 + 9m = 0$ (m là tham số thực).

1) Giải phương trình khi $m = 4$.

2) Tìm m để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 , trong đó có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 = \sqrt{3}x_2$.

3) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 2xy^2 = 3 \\ y^2 + 2x^2y = 3 \end{cases}$.

Câu 4. (0,75 điểm)

Trong 2021 số nguyên dương đầu tiên, có bao nhiêu số không chia hết cho 7 và không chia hết cho 11?

Câu 5. (3 điểm)

Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) ($CA > CB$). Ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . AD và BE cắt (O) lần lượt tại M và N .

1) Chứng minh tứ giác $ABDE$ nội tiếp, xác định tâm I của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABDE$ và chứng minh $MN \parallel DE$.

2) Chứng minh $AE \cdot AC \cdot CE = CD \cdot AB \cdot EF$.

3) Gọi K là trung điểm của HC . Chứng minh $IHKO$ là hình bình hành.

Câu 6. (0,75 điểm)

Cho ba số thực dương a, b, c . Chứng minh $\frac{a+b}{\sqrt{c}} + \frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} \geq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$.

HẾT

(Thí sinh được sử dụng máy tính cầm tay).

Họ và tên của thí sinh: Số báo danh:

Chữ ký của giám thị 1:

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1.

1.1 Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right) : (a+b)$ (với $a \geq 0, b \geq 0, a \neq b$).

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{(\sqrt{a})^3 - (\sqrt{b})^3}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right) : (a+b) \\ &= \left(\frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(a + \sqrt{ab} + b)}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right) \cdot \frac{1}{a+b} \\ &= (a + \sqrt{ab} + b - \sqrt{ab}) \cdot \frac{1}{a+b} \\ &= \frac{a+b}{a+b} \\ &= 1 \end{aligned}$$

1.2 Giải phương trình: $\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} + \frac{1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{2}{3}$ (1)

Điều kiện: $x > 0$

Ta có: $\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}+1}$

$$\frac{1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

Do đó: (1) $\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 3(\sqrt{x}+2) - 3\sqrt{x} = 2\sqrt{x}(\sqrt{x}+2) \\ &\Leftrightarrow 2(\sqrt{x})^2 + 4\sqrt{x} - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 + 2\sqrt{x} - 3 = 0 \end{aligned}$$

Đặt $t = \sqrt{x}$, $t > 0$ ta được phương trình $t^2 + 2t - 3 = 0$

Vì $a+b+c=0$ nên $t=1$ (nhận); $t=-3$ (loại)

Với $t=1 \Rightarrow \sqrt{x}=1 \Rightarrow x=1$ (thỏa điều kiện).

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là $S = \{1\}$

Câu 2.

2.1 Tìm đa thức bậc ba $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các hệ số thực.

Biết $P(x)$ chia hết cho $(x-1)$, $P(x)$ chia cho $(x-2)$ và $(x-3)$ đều có số dư là 6.

Biết: $P(x) = (x-1).A(x)$

$$P(x) = (x-2).B(x) + 6$$

$$P(x) = (x-3).C(x) + 6$$

Với $A(x); B(x); C(x)$ là các đa thức.

$$\text{Khi } x=1 \Rightarrow P(1)=0 \Rightarrow a+b+c=-1$$

$$\text{Khi } x=2 \Rightarrow P(2)=6 \Rightarrow 4a+2b+c=-2$$

$$\text{Khi } x=3 \Rightarrow P(3)=6 \Rightarrow 9a+3b+c=-21$$

Ta có hệ:
$$\begin{cases} a+b+c=-1 \\ 4a+2b+c=-2 \\ 9a+3b+c=-21 \end{cases}$$

Giải hệ ta được: $a=-9; b=26; c=-18$

Vậy $P(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 18$

2.2 Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn bất đẳng thức $5x^2 + 3y^2 + 4xy - 2x + 8y + 8 \leq 0$

Ta có: $5x^2 + 3y^2 + 4xy - 2x + 8y + 8 \leq 0$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 4xy + y^2 + x^2 - 2x + 1 + 2y^2 + 8y + 8 - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (2x+y)^2 + (x-1)^2 + 2(y+2)^2 \leq 1$$

Vì $(2x+y)^2 \in N; (x-1)^2 \in N; 2(y+2)^2 \in N$

Nên: $(2x+y)^2 + (x-1)^2 + 2(y+2)^2 \in N$

Do đó: $(2x+y)^2 + (x-1)^2 + 2(y+2)^2 = 0$ hoặc $(2x+y)^2 + (x-1)^2 + 2(y+2)^2 = 1$

i, $(2x+y)^2 + (x-1)^2 + 2(y+2)^2 = 0$ (1)

Vì $2(y+2)^2$ là số chẵn nên $2(y+2)^2 = 0 \Leftrightarrow y = -2$ thế vào (1) ta được:

$$(2x-2)^2 + (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow 5(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

ii, $(2x+y)^2 + (x-1)^2 + 2(y+2)^2 = 1$ (2)

Vì $2(y+2)^2$ là số chẵn và $2(y+2)^2 \leq 1$ nên $2(y+2)^2 = 0 \Leftrightarrow y = -2$ thế vào (1) ta được:

$$(2x-2)^2 + (x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow 5(x-1)^2 = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x-1 = \pm \frac{\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{5}}{5} + 1 \notin Z$$

Vậy: $x=1, y=-2$

Câu 3.

Cho phương trình $x^4 - 4(4m-1)x^2 + 9m = 0$ (*) (m là tham số thực).

3.1 Giải phương trình khi $m=4$.

Khi $m=4$, ta được phương trình $x^4 - 60x^2 + 36 = 0$ (1)

Đặt $t = x^2, t \geq 0$ ta được phương trình $t^2 - 60t + 36 = 0$ (2)

$\Delta' = 864 > 0$ nên phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt:

$$t_1 = 30 - 12\sqrt{6} \text{ (nhận); } t_2 = 30 + 12\sqrt{6} \text{ (nhận)}$$

- Với $t_1 = 30 - 12\sqrt{6} \Rightarrow x^2 = 30 - 12\sqrt{6} \Leftrightarrow x = \pm(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})$

- Với $t_2 = 30 + 12\sqrt{6} \Rightarrow x^2 = 30 + 12\sqrt{6} \Leftrightarrow x = \pm(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})$

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là $S = \{\pm(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}); \pm(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})\}$

3.2 Tìm m để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 trong đó có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 = \sqrt{3}x_2$.

Đặt $t = x^2, t \geq 0$ ta có phương trình $t^2 - 4(4m-1)t + 9m = 0$ (3)

Để phương trình (*) có bốn nghiệm phân biệt thì phương trình (3) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [-2(4m-1)]^2 - 9m > 0 \\ 4(4m-1) > 0 \\ 9m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 64m^2 - 41m + 4 > 0 \\ m > \frac{1}{4} \end{cases} \quad (**)$$

Vì $x_1 = \sqrt{3}x_2 \Rightarrow x_1^2 = 3x_2^2$ nên bài toán đưa về tìm m để phương trình (3) có hai nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn $t_1 = 3t_2$.

Ta có: $t_1 + t_2 = 4(4m-1)$ và $t_1 \cdot t_2 = 9m$ (hệ thức Vi-et)

Biết $t_1 = 3t_2 \Rightarrow 3t_2 + t_2 = 4(4m-1) \Leftrightarrow 4t_2 = 4(4m-1) \Leftrightarrow t_2 = 4m-1$

Do đó: $t_1 = 3(4m-1)$

Khi đó: $3(4m-1).(4m-1) = 9m \Leftrightarrow 3(4m-1)^2 = 9m \Leftrightarrow 16m^2 - 11m + 1 = 0 \quad (4)$

Giải phương trình (4) ta được: $m_1 = \frac{11+\sqrt{57}}{32}$ (thỏa (**))

$$m_2 = \frac{11-\sqrt{57}}{32} \quad (\text{không thỏa (**)})$$

Vậy $m = \frac{11+\sqrt{57}}{32}$

3.3 Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + 2xy^2 = 3 & (1) \\ y^2 + 2x^2y = 3 & (2) \end{cases}$$

Trừ vế theo vế của phương trình (1) cho (2) ta được: $x^2 - y^2 + 2xy^2 - 2x^2y = 0$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x+y) + 2xy(y-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x+y-2xy) = 0$$

i) $x-y=0 \Leftrightarrow x=y$ thế vào (1) ta được: $2x^3 + x^2 - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(2x^2 + 3x + 3) = 0$$

* $x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=1$

* $2x^2 + 3x + 3 = 0$, phương trình vô nghiệm vì $\Delta = -15 < 0$

ii) $x+y-2xy=0 \Leftrightarrow x+y=2xy$

Đặt $S = x+y; P = xy$, điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$

Ta được: $S = 2P$

Cộng vế theo vế của phương trình (1) cho (2) ta được: $x^2 + y^2 + 2xy^2 + 2x^2y = 6$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 - 2xy + 2xy(x+y) = 6$$

$$\Rightarrow S^2 - 2P + 2SP = 6$$

$$\Leftrightarrow 4P^2 - 2P + 4P^2 = 6$$

$$\Leftrightarrow 8P^2 - 2P - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P=1 \Rightarrow S=2 \\ P=\frac{-3}{4} \Rightarrow S=\frac{-3}{2} \end{cases} \quad (\text{nhận})$$

* $S=2, P=1$. Khi đó x, y là nghiệm của phương trình $X^2 - 2X + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (X-1)^2 = 0 \Leftrightarrow X=1$$

Vậy $x=1, y=1$

* $S=\frac{-3}{2}, P=\frac{-3}{4}$. Khi đó x, y là nghiệm của phương trình $X^2 + \frac{3}{2}X - \frac{3}{4} = 0$

Giải phương trình ta được $X_1 = \frac{-3+\sqrt{21}}{4}; X_2 = \frac{-3-\sqrt{21}}{4}$

Vậy $x = \frac{-3+\sqrt{21}}{4}; y = \frac{-3-\sqrt{21}}{4}$ hoặc $x = \frac{-3-\sqrt{21}}{4}; y = \frac{-3+\sqrt{21}}{4}$

Nghiệm của hệ phương trình:

$$(x, y) \in \left\{ (1, 1); \left(\frac{-3+\sqrt{21}}{4}; y = \frac{-3-\sqrt{21}}{4} \right); \left(\frac{-3-\sqrt{21}}{4}; y = \frac{-3+\sqrt{21}}{4} \right) \right\}.$$

Câu 4. Trong 2021 số nguyên dương đầu tiên, có bao nhiêu số không chia hết cho 7 và không chia hết cho 11?

Trong các số nguyên dương từ 1 đến 2021 các số chia hết cho 7 là:

7; 14; 21; ...; 2016

Do đó số các số chia hết cho 7 là: $(2016 - 7) : 7 + 1 = 288$ (số)

Trong các số nguyên dương từ 1 đến 2021 các số chia hết cho 11 là:

11; 22; 33; ...; 2013

Do đó số các số chia hết cho 11 là: $(2013 - 11) : 11 + 1 = 183$ (số)

Các số chia hết cho 7 và 11 là các số chia hết cho $7.11=77$ (do $(7;11)=1$)

Trong các số nguyên dương từ 1 đến 2021 các số chia hết cho 77 là

77; 154; ...; 2002

Do đó số các số chia hết cho 77 là: $(2002 - 77) : 77 + 1 = 26$ (số)

Số các số chia hết cho 7 hoặc chia hết cho 11 là: $288 + 183 - 26 = 445$ (số)

Vậy trong 2021 số nguyên dương đầu tiên, số các số không chia hết cho 7 và không chia hết cho 11 là $2021 - 445 = 1576$ (số)

5.1 Chứng minh tứ giác ABDE nội tiếp. Xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABDE và chứng minh $MN \parallel DE$

Ta có $\widehat{AEB} = \widehat{ADB} = 90^\circ$ (AD và BE là hai đường cao)

Và hai đỉnh D, E là hai đỉnh kề của tứ giác ABDE

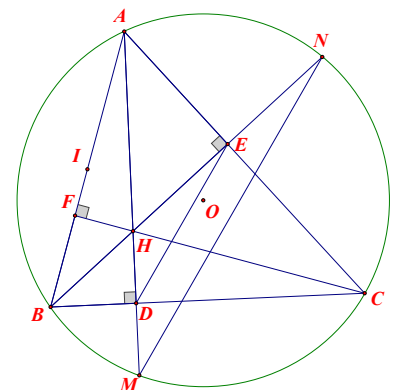
Nên tứ giác ABDE nội tiếp.

$\triangle ABE$ vuông tại E nên tâm I của đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABDE là trung điểm của cạnh AB.

$$\widehat{ABE} = \widehat{ADE} \text{ (góc nội tiếp chắn } \widehat{AE} \text{)}$$

$$\widehat{ABE} = \widehat{AMN} \text{ (góc nội tiếp chắn } \widehat{MN} \text{)}$$

Do đó $\widehat{ADE} = \widehat{AMN}$ mà hai góc này đồng vị nên $MN \parallel DE$.



5.2 Chứng minh: $AE \cdot AC \cdot CE = CD \cdot AB \cdot EF$

$\triangle CDE$ và $\triangle CAB$ có $\widehat{DCE} = \widehat{ACB}$ (góc chung) và $\widehat{CDE} = \widehat{BAC}$ (cùng bù với $\widehat{BDE}$)

$$\text{Nên } \triangle CDE \sim \triangle CAB \text{ (g.g) nên } \frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB} \Rightarrow BC = \frac{CA \cdot CE}{CD} \quad (1)$$

Tương tự ta có $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ (g.g) nên $\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow BC = \frac{AB \cdot EF}{AE}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{CA \cdot CE}{CD} = \frac{AB \cdot EF}{AE} \Rightarrow CA \cdot CE \cdot AE = AB \cdot CD \cdot EF$

5.3 Gọi K là trung điểm của HC. Chứng minh IHKO là hình bình hành

Kẻ đường kính CJ ta có:

JA // BH (cùng vuông góc với AC)

JB // AH (cùng vuông góc với BC)

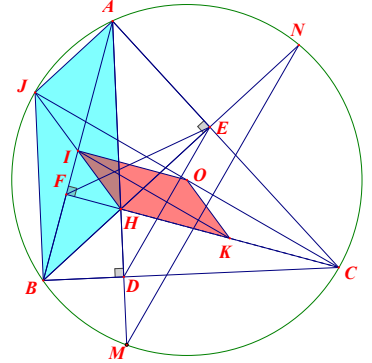
Do đó Tứ giác AHBJ là hình bình hành

Mà I là trung điểm của AB nên I là trung điểm của JH

Ta lại có O là trung điểm của JC nên IO là đường trung bình của $\triangle JHC$ nên $IO \parallel HC$ và $IO = \frac{HC}{2}$ mà K là trung điểm của HC

Do đó $IO \parallel HK$ và $IO = HK = \frac{HC}{2}$

Suy ra IHKO là hình bình hành.



6. Cho ba số thực dương a, b, c . Chứng minh: $\frac{a+b}{\sqrt{c}} + \frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} \geq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$

Đặt $x = \sqrt{a}$; $y = \sqrt{b}$; $z = \sqrt{c}$ suy ra $x^2 = a$; $y^2 = b$; $z^2 = c$ ($x, y, z > 0$)

Khi đó ta cần chứng minh $\frac{x^2 + y^2}{z} + \frac{y^2 + z^2}{x} + \frac{z^2 + x^2}{y} \geq 2(x + y + z)$

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + y^2}{z} + \frac{y^2 + z^2}{x} + \frac{z^2 + x^2}{y} &= \frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{z} + \frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{x} + \frac{z^2}{y} + \frac{x^2}{y} \\ &= \left(\frac{x^2}{z} + \frac{z^2}{x} \right) + \left(\frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{y} \right) + \left(\frac{y^2}{x} + \frac{x^2}{y} \right) = \frac{x^3 + z^3}{xz} + \frac{y^3 + z^3}{yz} + \frac{y^3 + x^3}{xz} \end{aligned}$$

Ta chứng minh $x^3 + z^3 \geq xz(x + z)$ (1)

Thật vậy ta có:

$$\begin{aligned} (x - z)^2(x + z) &\geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - z^2)(x - z) \geq 0 \\ \Leftrightarrow x^3 + z^3 - x^2z - xz^2 &\geq 0 \Leftrightarrow x^3 + z^3 \geq xz(x + z) \end{aligned}$$

Áp dụng (1) ta có:

$$\frac{x^3 + z^3}{xz} + \frac{y^3 + z^3}{yz} + \frac{y^3 + x^3}{xz} \geq \frac{xz(x+z)}{xz} + \frac{yz(y+z)}{yz} + \frac{xy(x+y)}{xy} = 2(x+y+z)$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = y = z$

$$\text{Vậy } \frac{a+b}{\sqrt{c}} + \frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} \geq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \text{ khi } a = b = c$$

_____ **THCS.TOANMATH.com** _____