

ĐỀ CHÍNH THỨC

MÔN: TOÁN (CHUYÊN)

(Đề thi có 2 trang)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát

đề

Câu 1. (1,5 điểm) Cho biểu thức

$$P = \left[\frac{(x-1)\sqrt{x-1}+x-3}{x-2} - \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} \right] : \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}-x+1} \quad \text{với } x > 1 \text{ và } x \neq 2.$$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của P khi $x = \sqrt{7+4\sqrt{3}} - (\sqrt{5}+1)\sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{5}|\sqrt{3}-2|$.

Câu 2. (1,5 điểm) Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = -2mx - 2m$. Tìm tất cả giá trị của tham số m sao cho (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1 và x_2 thỏa mãn $|x_1| + |x_2| = 2\sqrt{3}$.

Câu 3. (2,0 điểm) Giải phương trình và hệ phương trình sau trên tập số thực:

a) $x + 2\sqrt{2x+1} = 4\sqrt{x} + 2$.

b)
$$\begin{cases} (x+2)^2 = 12x + 4y + 1 \\ (y-1)^2 = 2y + 4x + 2 \end{cases}$$

Câu 4. (2,0 điểm)

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $x^2 + 5y^2 + 4xy + 4y + 2x - 3 = 0$.

b) Lúc 7 giờ, anh Toàn điều khiển một xe gắn máy khởi hành từ thành phố A đến thành phố B. Khi đi được $\frac{3}{4}$ quãng đường, xe bị hỏng nên anh Toàn dừng lại để sửa chữa. Sau 30 phút sửa xe, anh Toàn tiếp tục điều khiển xe gắn máy đó đi đến thành phố B với vận tốc nhỏ hơn vận tốc ban đầu 10 km/h. Lúc 10 giờ 54 phút, anh Toàn đến thành phố B. Biết rằng quãng đường từ thành phố A đến thành phố B là 160 km và vận tốc của xe trên mỗi đoạn đường không đổi. Hỏi anh Toàn dừng xe để sửa chữa lúc mấy giờ?

Câu 5. (2,0 điểm) Cho tam giác ABC ($AB > BC > AC$) có ba góc nhọn và nội tiếp đường tròn (O). Vẽ đường tròn tâm C, bán kính CB cắt đường thẳng AB tại điểm D và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là E.

a) Chứng minh đường thẳng DE vuông góc với đường thẳng AC.

b) Đường thẳng DE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là F. Các đường thẳng CO, AB cắt nhau tại điểm H và các đường thẳng BE, CF cắt nhau tại điểm K. Chứng minh $\widehat{CKH} = \widehat{CBH}$.

c) Gọi I là giao điểm của đường thẳng AB và CE. Chứng minh $IA \cdot IB = ID \cdot IH$.

Câu 6. (1,0 điểm) Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(x+2)^2}{y+z} + \frac{(y+2)^2}{z+x} + \frac{(z+2)^2}{x+y} \geq 12$$

-----HẾT-----

Câu 1. (1,5 điểm) Cho biểu thức

$$P = \left[\frac{(x-1)\sqrt{x-1}+x-3}{x-2} - \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} \right] : \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}-x+1} \quad \text{với } x > 1 \text{ và } x \neq 2.$$

a) Rút gọn biểu thức P.

Với $x > 1$ và $x \neq 2$ ta có:

$$P = \left[\frac{(x-1)\sqrt{x-1}+x-3}{x-2} - \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} \right] : \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}-x+1}$$

$$P = \left[\frac{(x-1)\sqrt{x-1}-1}{x-2} + 1 - \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} \right] : \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}-x+1}$$

$$P = \left[\frac{(\sqrt{x-1}-1)(x-1+\sqrt{x-1}+1)}{x-2} + \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+1} \right] : \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}-x+1}$$

$$P = \left[\frac{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)(x+\sqrt{x-1})}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} + \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+1} \right] : \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}-x+1}$$

$$P = \left[\frac{x+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+1} + \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+1} \right] \cdot [(x-1)\sqrt{x-1}-x+1]$$

$$P = \frac{x+2\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+1} \cdot (x-1)(\sqrt{x-1}-1)$$

$$P = \frac{x-1+2\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-1}+1} \cdot (x-1)(\sqrt{x-1}-1)$$

$$P = \frac{(\sqrt{x-1}+1)^2}{\sqrt{x-1}+1} \cdot (x-1)(\sqrt{x-1}-1)$$

$$P = (\sqrt{x-1}+1) \cdot (x-1)(\sqrt{x-1}-1)$$

$$P = (x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$$

Vậy $P = x^2 - 3x + 2$ với $x > 1$ và $x \neq 2$.

b) Tính giá trị của P khi $x = \sqrt{7+4\sqrt{3}} - (\sqrt{5}+1)\sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{5}|\sqrt{3}-2|$.

$$x = \sqrt{7+4\sqrt{3}} - (\sqrt{5}+1)\sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{5}|\sqrt{3}-2|$$

$$x = \sqrt{4+4\sqrt{3}+3} - (\sqrt{5}+1)\sqrt{4-4\sqrt{3}+3} + \sqrt{5}(2-\sqrt{3}) \quad (\text{do } \sqrt{3} < 2)$$

$$x = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} - (\sqrt{5}+1)\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{5}(2-\sqrt{3})$$

$$x = 2+\sqrt{3} - (\sqrt{5}+1)(2-\sqrt{3}) + \sqrt{5}(2-\sqrt{3}) \quad (\text{do } 2-\sqrt{3} > 0)$$

$$x = 2+\sqrt{3} - (2-\sqrt{3})(\sqrt{5}+1-\sqrt{5})$$

$$x = 2+\sqrt{3} - 2+\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \quad (\text{thỏa điều kiện})$$

$$\text{Thay } x = 2\sqrt{3} \text{ vào P ta được } P = (2\sqrt{3})^2 - 3 \cdot 2\sqrt{3} + 2 = 14 - 6\sqrt{3}$$

$$\text{Vậy } P = 14 - 6\sqrt{3}.$$

Câu 2. (1,5 điểm) Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = -2mx - 2m$. Tìm tất cả giá trị của tham số m sao cho (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1 và x_2 thỏa mãn $|x_1| + |x_2| = 2\sqrt{3}$.

Giải:

Hoành độ giao điểm của (d) và (P) là nghiệm của phương trình:

$$x^2 = -2mx - 2m \Leftrightarrow x^2 + 2mx + 2m = 0 \quad (1)$$

Ta có: $\Delta' = m^2 - 2m$.

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1 và x_2

$\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1 và x_2

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m > 0 \Leftrightarrow m \cdot (m - 2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < 0 \end{cases}$$

Theo định lý Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1 \cdot x_2 = 2m \end{cases}$

Theo đề bài ta có:

$$|x_1| + |x_2| = 2\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow (|x_1| + |x_2|)^2 = 12$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + 2|x_1 \cdot x_2| = 12$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 + 2|x_1 \cdot x_2| = 12$$

$$\Leftrightarrow (-2m)^2 - 2 \cdot 2m + 2|2m| = 12$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 4m + 4|m| = 12 (*)$$

• Với $m > 2$ thì (*) trở thành: $4m^2 - 4m + 4m = 12 \Leftrightarrow m^2 = 3$ (loại vì $m^2 > 4$)

• Với $m < 0$ thì (*) trở thành: $4m^2 - 8m - 12 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} m = -1(\text{nhan}) \\ m = 3(\text{loai}) \end{cases}$$

Vậy với $m = -1$ thì (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1 và x_2 thỏa mãn đề bài.

Câu 3. (2,0 điểm) Giải phương trình và hệ phương trình sau trên tập số thực:

a) $x + 2\sqrt{2x + 1} = 4\sqrt{x} + 2$.

ĐKXĐ: $x \geq 0$

$$x + 2\sqrt{2x + 1} = 4\sqrt{x} + 2$$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 + 2\sqrt{2x + 1} + 1 = x + 4\sqrt{x} + 4$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2x + 1} + 1)^2 = (\sqrt{x} + 2)^2$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{2x + 1} + 1| = |\sqrt{x} + 2|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x + 1} + 1 = \sqrt{x} + 2 \quad (\text{do } \sqrt{2x + 1} + 1 > 0, \sqrt{x} + 2 > 0)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x + 1} = \sqrt{x} + 1$$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 = x + 1 + 2\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} = x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases} \text{ (thỏa điều kiện)}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{0; 4\}$

b) $\begin{cases} (x + 2)^2 = 12x + 4y + 1 \\ (y - 1)^2 = 2y + 4x + 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + 4 = 12x + 4y + 1 \\ y^2 - 2y + 1 = 2y + 4x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 8x - 4y + 3 = 0(1) \\ y^2 - 4y - 4x - 1 = 0(2) \end{cases}$$

$$\text{Lấy (1) - (2) ta được: } x^2 - y^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = y^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = y \\ x - 2 = -y \end{cases}$$

TH1: $y = x - 2$ thay vào (1) ta được: $x^2 - 8x - 4(x - 2) + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 11 = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = 11 \end{cases}$$

- Với $x = 1$ thì $y = 1 - 2 = -1$
- Với $x = 11$ thì $y = 11 - 2 = 9$

TH2: $-y = x - 2$ thay vào (1) ta được: $x^2 - 8x + 4(x - 2) + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = -1 \\ x = 5 \end{cases}$$

- Với $x = -1$ thì $y = 2 - (-1) = 3$
- Với $x = 5$ thì $y = 2 - 5 = -3$

Vậy hệ phương trình có tập nghiệm: $S = \{(1; -1); (11; 9); (-1; 3); (5; -3)\}$

Câu 4. (2,0 điểm)

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $x^2 + 5y^2 + 4xy + 4y + 2x - 3 = 0$.

Ta có: $x^2 + 5y^2 + 4xy + 4y + 2x - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 4xy + 4y^2) + y^2 + 2(x + 2y) + 1 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow [(x + 2y)^2 + 2(x + 2y) + 1] = 4$$

$$\Leftrightarrow (x + 2y + 1)^2 + y^2 = 4$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên phương trình trên tương đương với
$$\begin{cases} \begin{cases} (x + 2y + 1)^2 = 4 \\ y^2 = 0 \end{cases} & (I) \\ \begin{cases} (x + 2y + 1)^2 = 0 \\ y^2 = 4 \end{cases} & (II) \end{cases}$$

- Giải (I):

$$\begin{cases} (x + 2y + 1)^2 = 4 \\ y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 1)^2 = 4 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x + 1 = 2 \\ x + 1 = -2 \end{cases} \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases} \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, y = 0 \\ x = -3, y = 0 \end{cases}$$

- Giải (II):

$$\begin{cases} (x + 2y + 1)^2 = 0 \\ y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ \begin{cases} y = 2 \\ y = -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 2 \\ y = -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -5 \\ x = 3 \end{cases} \\ y = 2 \\ y = -2 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm nguyên của phương trình là: $S = \{(1; 0); (-3; 0); (-5; 2); (3; -2)\}$.

b) Lúc 7 giờ, anh Toàn điều khiển một xe gắn máy khởi hành từ thành phố A đến thành phố B. Khi đi được $\frac{3}{4}$ quãng đường, xe bị hỏng nên anh Toàn dừng lại để sửa chữa. Sau 30 phút sửa xe, anh Toàn tiếp tục điều khiển xe gắn máy đó đi đến thành phố B với vận tốc nhỏ hơn vận tốc ban đầu 10 km/h. Lúc 10 giờ 54 phút, anh Toàn đến thành phố B. Biết rằng quãng đường từ thành phố A đến thành phố B là 160 km và vận tốc của xe trên mỗi đoạn đường không đổi. Hỏi anh Toàn dừng xe để sửa chữa lúc mấy giờ?

Giải:

Gọi vận tốc xe ban đầu là x (km/h) ($x > 10$).

Vận tốc sau khi sửa chữa xe là: $x - 10$ (km/h)

Quãng đường từ A đến đoạn đường bị hỏng xe là: $\frac{3}{4} \cdot 160 = 120$ (km)

Quãng đường còn lại là: $160 - 120 = 40$ (km).

Thời gian đi từ A đến đoạn đường bị hỏng xe là: $\frac{120}{x}$ (h), thời gian đi từ lúc đã sửa xe đến B là $\frac{40}{x-10}$ (h)

Anh Toàn phải dừng lại sửa xe 30 phút = 0,5 h nên tổng thời gian đi từ A đến B là:

$$\frac{120}{x} + 0.5 + \frac{40}{x-10} \text{ (h)}$$

Vì lúc đi từ A là 7 giờ và đi đến B là 10 giờ 54 phút nên tổng thời gian đi từ A đến B (kể cả thời gian sửa xe là 3 giờ 54 phút = 3,9 (h)

$$\text{Vậy ta có phương trình: } \frac{120}{x} + 0.5 + \frac{40}{x-10} = 3,9$$

$$\Leftrightarrow \frac{120}{x} + \frac{40}{x-10} = 3,4$$

$$\Rightarrow 120(x-10) + 40x = 3,4x \cdot (x-10)$$

$$\Leftrightarrow 3,4x^2 - 194x + 1200 = 0 \quad (1)$$

$\Delta' = 97^2 - 3,4 \cdot 1200 = 5329 = 73^2 > 0$ nên phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1 = 50 \text{ (thỏa đk)}$$

$$x_2 = \frac{120}{17} < 10 \text{ (không thỏa đk)}$$

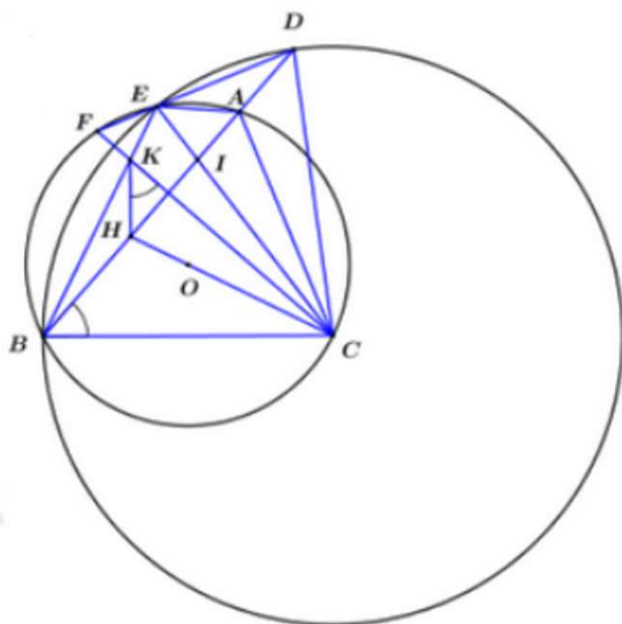
Suy ra vận tốc của xe đi từ A đến lúc bị hỏng xe là 50 km/h

Thời gian anh Toàn đi từ A đến lúc bị hỏng xe là $\frac{120}{50} = 2,4$ (h)

Vậy anh Toàn dừng xe để sửa chữa lúc: $7 + 2,4 = 9,4$ (h) = 9 giờ 24 phút

Câu 5. (2,0 điểm) Cho tam giác ABC ($AB > BC > AC$) có ba góc nhọn và nội tiếp đường tròn (O). Vẽ đường tròn tâm C, bán kính CB cắt đường thẳng AB tại điểm D và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là E.

a) Chứng minh đường thẳng DE vuông góc với đường thẳng AC.



Xét (O): $\widehat{AEC} = \widehat{ABC}$ (2 góc nội tiếp chắn cung AC)

$\triangle CBD$ có $CB = CD$ (bán kính (C)) $\Rightarrow \triangle CBD$ cân tại C $\Rightarrow \widehat{CBD} = \widehat{CDB}$

Suy ra $\widehat{CEA} = \widehat{CDB}$

Mà ta có: $\widehat{CED} = \widehat{CEA} + \widehat{AED}$

$$\widehat{CDE} = \widehat{CDB} + \widehat{ADE}$$

$\triangle CED$ có $CE = CD$ (bán kính (C)) $\Rightarrow \triangle CED$ cân tại C $\Rightarrow \widehat{CED} = \widehat{CDE}$

Suy ra: $\widehat{AED} = \widehat{ADE}$ nên $\triangle ADE$ cân tại A $\Rightarrow AE = AD$

Ta lại có: $CE = CD$ (bán kính (C)) nên AC là trung trực của ED

Suy ra $AC \perp ED$

b) Đường thẳng DE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là F. Các đường thẳng CO, AB cắt nhau tại điểm H và các đường thẳng BE, CF cắt nhau tại điểm K. Chứng minh rằng: $\widehat{CKH} = \widehat{CBH}$.

*Ta có: $\widehat{FBD} = \widehat{AED}$ (góc trong bằng góc ngoài đối diện của tứ giác nội tiếp BCEF)

Mà $\widehat{FBD} = \widehat{FCA}$ (2 góc nội tiếp chắn cung FA của (O))

Và $\widehat{AED} = \widehat{ADE}$ (chứng minh câu a)

Nên $\widehat{FBD} = \widehat{ADE}$ hay $\widehat{FBD} = \widehat{BDF}$

Do đó $\triangle FBD$ cân tại F $\Rightarrow FB = FD$

Mà $CB = CD$ (bán kính (C))

Nên FC là trung trực của BD $\Rightarrow FC \perp DB$ hay $BH \perp CK$

*Ta có: $CE = CB$ (bán kính (C)) và $OE = OB$ (bán kính (O))

Suy ra OC là trung trực của BE $\Rightarrow OC \perp BE$ hay $CH \perp BK$

Xét $\triangle BCK$:

$CH \perp BK$ (cmt)

$BH \perp CK$ (cmt)

Suy ra H là trực tâm $\triangle BCK$ nên $KH \perp BC$

$\Rightarrow \widehat{CKH} + \widehat{KCB} = 90^\circ$

Mà $BH \perp CK$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{CBH} + \widehat{KCB} = 90^\circ$

Nên $\widehat{CKH} = \widehat{CBH}$ (đpcm)

c) Gọi I là giao điểm của đường thẳng AB và CE. Chứng minh $IA \cdot IB = ID \cdot IH$.

*Xét $\triangle IAE$ và $\triangle IBC$ có:

$\widehat{AEI} = \widehat{CBI}$ (2 góc nội tiếp chắn cung AC của (O))

$\widehat{EIA} = \widehat{BIC}$ (2 góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \triangle IAE \sim \triangle ICB$ (g - g) $\Rightarrow \frac{IE}{IB} = \frac{IA}{IC}$

$\Rightarrow IE \cdot IC = IB \cdot IA$

* Ta có: B đối xứng E qua CO (OC là trung trực của BE)

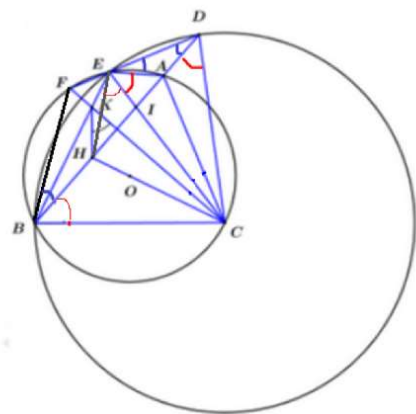
$\Rightarrow \widehat{CBH} = \widehat{CEH}$ (tính chất đối xứng)

Và: $\widehat{CBH} = \widehat{CDH}$ ($\triangle CBD$ cân tại C)

Nên: $\widehat{CEH} = \widehat{CDH}$

$\Rightarrow CDEH$ nội tiếp (2 đỉnh kề nhau E, D cùng nhìn cạnh CH dưới các góc bằng nhau)

$\Rightarrow \widehat{DEI} = \widehat{CHI}$



Xét $\triangle IED$ và $\triangle IHC$ có:

$$\widehat{DEI} = \widehat{CHI} \text{ (cmt)}$$

$$\widehat{ED I} = \widehat{HIC} \text{ (2 góc đối đỉnh)}$$

$$\Rightarrow \triangle IED \sim \triangle IHC \text{ (g - g)} \Rightarrow \frac{IE}{ID} = \frac{IH}{IC}$$

$$\Rightarrow IE \cdot IC = ID \cdot IH$$

$$\text{Mà } IE \cdot IC = IB \cdot IA \text{ (cmt)}$$

$$\text{Vậy } IB \cdot IA = ID \cdot IH \text{ (đpcm)}$$

Câu 6. (1,0 điểm) Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(x+2)^2}{y+z} + \frac{(y+2)^2}{z+x} + \frac{(z+2)^2}{x+y} \geq 12$$

Áp dụng Bất đẳng thức phụ $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$. Dấu “=” xảy ra khi $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, $a, b, c > 0$

Chứng minh BĐT phụ:

Áp dụng BĐT B.C.S cho hai bộ số $\left(\frac{x}{\sqrt{a}}; \frac{y}{\sqrt{b}}; \frac{z}{\sqrt{c}}\right)$ và $(\sqrt{a}; \sqrt{b}; \sqrt{c})$ ta có:

$$\left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c}\right)(a+b+c) \geq (x+y+z)^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$$

Khi đó ta có:

$$\frac{(x+2)^2}{y+z} + \frac{(y+2)^2}{z+x} + \frac{(z+2)^2}{x+y} \geq \frac{(x+y+z+6)^2}{2(x+y+z)}$$

$$\Rightarrow \frac{(x+2)^2}{y+z} + \frac{(y+2)^2}{z+x} + \frac{(z+2)^2}{x+y} \geq \frac{(x+y+z)^2 + 12(x+y+z) + 36}{2(x+y+z)}$$

$$\Rightarrow \frac{(x+2)^2}{y+z} + \frac{(y+2)^2}{z+x} + \frac{(z+2)^2}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2} + \frac{18}{x+y+z} + 6$$

$$\Rightarrow \frac{(x+2)^2}{y+z} + \frac{(y+2)^2}{z+x} + \frac{(z+2)^2}{x+y} \geq 2\sqrt{\frac{x+y+z}{2} \cdot \frac{18}{x+y+z}} + 6 \text{ (BĐT Cauchy)}$$

$$\Rightarrow \frac{(x+2)^2}{y+z} + \frac{(y+2)^2}{z+x} + \frac{(z+2)^2}{x+y} \geq 2\sqrt{9} + 6 = 12$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} \frac{x+2}{y+z} = \frac{y+2}{z+x} = \frac{z+2}{x+y} \\ \frac{x+y+z}{2} = \frac{18}{x+y+z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ (x+y+z)^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 2$$