

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BẾN TRE**

ĐỀ CHÍNH THỨC

**ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CÔNG LẬP
NĂM HỌC 2021 – 2022
Môn: TOÁN (chuyên)
Thời gian: 150 phút (không kể phát đề)**

Câu 1. (2,0 điểm)

- a) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = (6 - 7m)x + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- b) Cho Parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $(d): y = -x + 6$. Biết (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ với $x_1 < x_2$. Tính $4x_2 + y_1$.
- c) Rút gọn biểu thức $A = (\sqrt{x-2} - 1)^2 + \sqrt{4x+4\sqrt{x-2}-7}$ (với $x \geq 2$).

Câu 2. (1,0 điểm)

Cho phương trình: $x^2 - (m+3)x + 4m - 4 = 0$ (1), với m là tham số. Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + x_1x_2 = 20$.

Câu 3. (3,0 điểm)

- a) Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2y - xy + 2x - 1 = y^2 - xy^2 - 2y$.
- b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} y^2 - 2xy - 2 = 0 \\ 4x^2 - y^2 + y - 2x + 2 = 0. \end{cases}$$
- c) Giải phương trình: $(x+3)(\sqrt{2x+5} - 2\sqrt{x+2}) + \sqrt{2x^2+9x+10} = 1$.

Câu 4. (1,0 điểm)

Cho ba số thực dương x, y, z thỏa $3\sqrt{xy} + \sqrt{xz} = 2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{4yz}{x} + \frac{5xz}{y} + \frac{7xy}{z} \geq 8.$$

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A với $(AB > AC)$, có đường cao AH . Biết $BC = 1\text{dm}$ và $AH = \frac{12}{25}\text{dm}$.

- a) Tính độ dài hai cạnh AB và AC
- b) Kẻ $HD \perp AB$; $HE \perp AC$ (với $D \in AB$, $E \in AC$). Gọi I là trung điểm của BC . Chứng minh $IA \perp DE$.

Câu 6. (1,0 điểm)

Cho tam giác ABC có đường phân giác ngoài của góc A cắt đường thẳng BC tại điểm D . Gọi M là trung điểm của BC . Đường tròn ngoại tiếp $\triangle ADM$ cắt các đường thẳng AB , AC lần lượt tại E và F (với E, F khác A). Gọi N là trung điểm của EF . Chứng minh rằng $MN \parallel AD$.

HẾT

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. (2,0 điểm)

- a) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = (6 - 7m)x + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- b) Cho Parabol $(P): y = 2x^2$ và đường thẳng $(d): y = -x + 6$. Biết (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ với $x_1 < x_2$. Tính $4x_2 + y_1$.
- c) Rút gọn biểu thức $A = (\sqrt{x-2} - 1)^2 + \sqrt{4x + 4\sqrt{x-2} - 7}$ (với $x \geq 2$).

Lời giải

- a) Hàm số $y = (6 - 7m)x + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow 6 - 7m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{6}{7}$.

Vậy $m > \frac{6}{7}$ thì hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) , ta có:

$$2x^2 = -x + 6 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 6 = 0$$

Có: $\Delta = (-1)^2 + 4.2.6 = 49 > 0$

Vậy phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{49}}{2.2} = -2 \text{ và } x_2 = \frac{-1 + \sqrt{49}}{2.2} = \frac{3}{2}$$

Với $x_1 = -2$, ta có $y_1 = 8$, suy ra $A(-2; 8)$.

Với $x_2 = \frac{3}{2}$, ta có $y_2 = \frac{9}{2}$, suy ra $B(\frac{3}{2}; \frac{9}{2})$.

Khi đó, ta có:

$$4x_2 + y_1 = 4 \cdot \frac{3}{2} + 8 = 14.$$

Vậy $4x_2 + y_1 = 14$.

- c)

$$\begin{aligned} A &= (\sqrt{x-2} - 1)^2 + \sqrt{4x + 4\sqrt{x-2} - 7} \\ &= x - 2 - 2\sqrt{x-2} + 1 + \sqrt{(2\sqrt{x-2})^2 + 2.2\sqrt{x-2} + 1} \\ &= x - 1 - 2\sqrt{x-2} + \sqrt{(2\sqrt{x-2} + 1)^2} \\ &= x - 1 - 2\sqrt{x-2} + |2\sqrt{x-2} + 1| \\ &= x - 1 - 2\sqrt{x-2} + 2\sqrt{x-2} + 1 \quad (\text{do } 2\sqrt{x-2} + 1 > 0) \\ &= x \end{aligned}$$

Vậy $A = x$.

Câu 2. (1,0 điểm)

Cho phương trình: $x^2 - (m+3)x + 4m - 4 = 0$ (1), với m là tham số. Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + x_1x_2 = 20$.

Lời giải

Ta có: $\Delta = (m+3)^2 - 4(4m-4) = m^2 + 6m + 9 - 16m + 16 = m^2 - 10m + 25 = (m-5)^2$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow (m-5)^2 > 0 \Leftrightarrow m-5 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 5$$

Vậy với $m \neq 5$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

Theo đề bài ta có: $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + x_1x_2 = 20$ (2), với điều kiện $\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$

Do đó, phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1 \geq 0$ và $x_2 \geq 0$, nghĩa là

$$\begin{cases} m \neq 5 \\ m+3 \geq 0 \\ 4m-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 5 \\ m \geq -3 \\ m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 5 \\ m \geq 1 \end{cases} (*)$$

Áp dụng định lý Vi-et, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m+3 \\ x_1x_2 = 4m-4 \end{cases}$

Ta có:

$$\begin{aligned} (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2 &= x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1x_2} \\ &= m+3 + 2\sqrt{4m-4} \\ &= m+3 + 4\sqrt{m-1} \\ &= m-1 + 4\sqrt{m-1} + 4 = (\sqrt{m-1} + 2)^2 \end{aligned}$$

Từ đó, ta suy ra

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{m-1} + 2 \quad (\text{do } \sqrt{m-1} + 2 > 0, \forall m \geq 1)$$

Từ phương trình (2), ta được

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + x_1x_2 = 20 \Leftrightarrow \sqrt{m-1} + 2 + 4m - 4 = 20 \Leftrightarrow \sqrt{m-1} = 22 - 4m \quad (3)$$

Giải phương trình (3) với điều kiện: $22 - 4m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{11}{2}$ (**)

$$\begin{aligned} (3) &\Leftrightarrow m-1 = (22-4m)^2 \\ &\Leftrightarrow m-1 = 484 - 176m + 16m^2 \\ &\Leftrightarrow 16m^2 - 177m + 485 = 0 \quad (4) \end{aligned}$$

Ta có: $\Delta = (-177)^2 - 4.16.485 = 289 > 0$

Vậy phương trình (4) có 2 nghiệm phân biệt:

$$m = \frac{177 - \sqrt{289}}{2.16} = 5 \quad \text{và} \quad m = \frac{177 + \sqrt{289}}{2.16} = \frac{97}{16}$$

So với điều kiện (*) và (**) thì $m \in \emptyset$.

Vậy không tồn tại giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3. (3,0 điểm)

a) Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2y - xy + 2x - 1 = y^2 - xy^2 - 2y$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} y^2 - 2xy - 2 = 0 \\ 4x^2 - y^2 + y - 2x + 2 = 0. \end{cases}$$

c) Giải phương trình: $(x+3)(\sqrt{2x+5} - 2\sqrt{x+2}) + \sqrt{2x^2+9x+10} = 1$.

Lời giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned} x^2y - xy + 2x - 1 &= y^2 - xy^2 - 2y \\ \Leftrightarrow x^2y - xy + 2x - 1 - y^2 + xy^2 + 2y &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^2y + xy^2) - (xy + y^2) + 2(x + y) &= 1 \\ \Leftrightarrow xy(x + y) - y(x + y) + 2(x + y) &= 1 \\ \Leftrightarrow (x + y)(xy - y + 2) &= 1 \quad (1) \end{aligned}$$

Vì đây là phương trình nghiệm nguyên nên ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ xy - y + 2 = 1 \end{cases} \quad (*)$$

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ xy - y + 2 = -1 \end{cases} \quad (**)$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ (1 - y)y - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ -y^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y \\ y = 1 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; y = 1 \\ x = 2; y = -1 \end{cases}$$

$$(**) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - y \\ (-1 - y)y - y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - y \\ -y^2 - 2y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - y \\ y = 1 \\ y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2; y = 1 \\ x = 2; y = -3 \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là: $S = \{(0;1), (2;-1), (-2;1), (2;-3)\}$.

b) Ta có:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y^2 - 2xy - 2 = 0 \\ 4x^2 - y^2 + y - 2x + 2 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 2xy = 2 \\ (4x^2 - y^2) + (y - 2x) + (y^2 - 2xy) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 2xy = 2 \\ (2x - y)(2x + y) - (2x - y) - y(2x - y) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 2xy = 2 \\ (2x - y)[2x + y - 1 - y] = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 2xy = 2 \\ (2x - y)(2x - 1) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 2xy = 2 \\ 2x - y = 0 \\ 2x - 1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Mặt khác, $y^2 - 2xy = 2 \Leftrightarrow y(y - 2x) = 2$, nghĩa là $y - 2x \neq 0$.

Do đó, từ hệ phương trình ban đầu đề cho, ta giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} y^2 - 2xy = 2 \\ 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y^2 - y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy hệ có tập nghiệm là $S = \left\{ \left(\frac{1}{2}; -1 \right), \left(\frac{1}{2}; 2 \right) \right\}$

c) Giải phương trình (*): $(x+3)(\sqrt{2x+5} - 2\sqrt{x+2}) + \sqrt{2x^2 + 9x + 10} = 1$.

$$\text{Điều kiện xác định: } \begin{cases} 2x+5 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ 2x^2+9x+10 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{5}{2} \\ x \geq -2 \\ x \leq -\frac{5}{2} \vee x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -2.$$

$$\text{Ta đặt } \begin{cases} a = \sqrt{2x+5} & (a \geq 1) \\ b = \sqrt{x+2} & (b \geq 0) \end{cases}$$

$$\text{Ta thấy } \begin{cases} a^2 - 2b^2 = (2x+5) - 2(x+2) = 1 \\ a^2 - b^2 = (2x+5) - (x+2) = x+3 \\ ab = \sqrt{(2x+5)(x+2)} = \sqrt{2x^2 + 9x + 10} \end{cases}$$

Phương trình (*) trở thành:

$$\begin{aligned} (a^2 - b^2)(a - 2b) + ab &= a^2 - 2b^2 \Leftrightarrow (a^2 - b^2)(a - 2b) - (a^2 - b^2) + (b^2 + ab) = 0 \\ &\Leftrightarrow (a^2 - b^2)(a - 2b - 1) + (b^2 + ab) = 0 \\ &\Leftrightarrow (a - b)(a + b)(a - 2b - 1) + b(a + b) = 0 \\ &\Leftrightarrow (a + b)[(a - b)(a - 2b - 1) + b] = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 & (1) \\ (a - b)(a - 2b - 1) + b = 0 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Vì $a + b \geq 1$ nên ta chỉ giải phương trình (2)

$$\begin{aligned} (a - b)(a - 2b - 1) + b &= 0 \Leftrightarrow (a - b)(a - b - 1) - b(a - b) + b = 0 \\ &\Leftrightarrow (a - b)(a - b - 1) - b(a - b - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (a - b - 1)(a - 2b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a - b - 1 = 0 \\ a - 2b = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

TH1: Với $a - 2b = 0$, ta có

$$\begin{aligned} a - 2b &= 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+5} - 2\sqrt{x+2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2x+5} = 2\sqrt{x+2} \\ &\Leftrightarrow 2x+5 = 4(x+2) \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

So với điều kiện thì $x = -\frac{3}{2}$ (Nhận).

TH2: Với $a - b - 1 = 0$, ta có

$$\begin{aligned}a - b - 1 = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{2x+5} - \sqrt{x+2} - 1 = 0 \\&\Leftrightarrow \sqrt{2x+5} = \sqrt{x+2} + 1 \\&\Leftrightarrow 2x+5 = x+3+2\sqrt{x+2} \\&\Leftrightarrow x+2-2\sqrt{x+2} = 0 \\&\Leftrightarrow \sqrt{x+2}(\sqrt{x+2}-2) = 0 \\&\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2} = 0 \\ \sqrt{x+2}-2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 0 \\ \sqrt{x+2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x+2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}\end{aligned}$$

So với điều kiện thì $x = 2$ (Nhận) và $x = -2$ (Nhận).

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{-2; -\frac{3}{2}; 2\right\}$.

Câu 4. (1,0 điểm)

Cho ba số thực dương x, y, z thỏa $3\sqrt{xy} + \sqrt{xz} = 2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{4yz}{x} + \frac{5xz}{y} + \frac{7xy}{z} \geq 8.$$

Lời giải

Ta đặt $M = \frac{4yz}{x} + \frac{5xz}{y} + \frac{7xy}{z}$, ta có

$$\begin{aligned}M &= \frac{4yz}{x} + \frac{5xz}{y} + \frac{7xy}{z} \\&= \frac{yz}{x} + 3\frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} + 4\frac{xz}{y} + 3\frac{xy}{z} + 4\frac{xy}{z} \\&= \left(\frac{yz}{x} + \frac{xz}{y}\right) + 3\left(\frac{yz}{x} + \frac{xy}{z}\right) + 4\left(\frac{xz}{y} + \frac{xy}{z}\right)\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta được

$$\begin{aligned}M &\geq 2\sqrt{\frac{yz}{x} \cdot \frac{xz}{y}} + 3.2\sqrt{\frac{yz}{x} \cdot \frac{xy}{z}} + 4.2\sqrt{\frac{xz}{y} \cdot \frac{xy}{z}} \\&\geq 2z + 6y + 8x \\&\geq (2z + 2x) + (6y + 6x)\end{aligned}$$

Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta được

$$\begin{aligned}M &\geq 2.2\sqrt{xz} + 6.2\sqrt{xy} \\&\geq 4(\sqrt{xz} + 3\sqrt{xy}) = 4.2 = 8\end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x = y = z \\ \sqrt{xz} + 3\sqrt{xy} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{2}.$

Vậy khi $x = y = z = \frac{1}{2}$ thì $M \geq 8$ (đpcm).

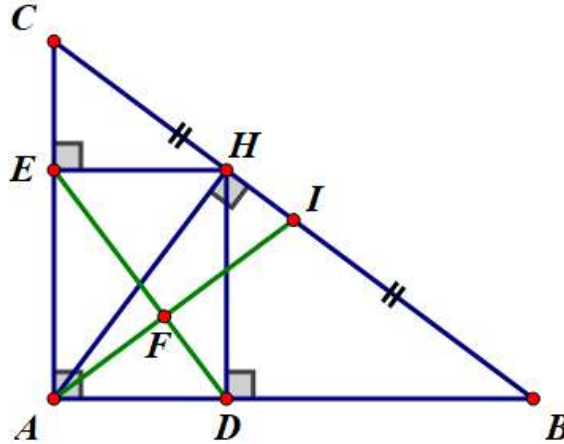
Câu 5. (2,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A với ($AB > AC$), có đường cao AH . Biết $BC = 1\text{dm}$ và $AH = \frac{12}{25}\text{dm}$.

a) Tính độ dài hai cạnh AB và AC

b) Kẻ $HD \perp AB$; $HE \perp AC$ (với $D \in AB$, $E \in AC$). Gọi I là trung điểm của BC . Chứng minh $IA \perp DE$.

Lời giải



a) **Tính độ dài hai cạnh AB và AC**

Áp dụng hệ thức lượng và định lý Pytago cho $\triangle ABC$ vuông tại A , ta có:

$$\begin{cases} AB^2 + AC^2 = BC^2 = 1 \\ AB \cdot AC = AH \cdot BC = \frac{12}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB^2 + AC^2 = 1 \\ AB^2 \cdot AC^2 = \frac{144}{625} \end{cases}$$

Khi đó, AB^2 và AC^2 là các nghiệm dương của phương trình.

Áp dụng hệ quả của định lý Vi-et, ta được

$$X^2 - 1X + \frac{144}{625} = 0$$

Ta có: $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{144}{625} = \frac{49}{625} > 0$ nên phương trình trên có 2 nghiệm phân biệt:

$$X_1 = \frac{1 - \sqrt{\frac{49}{625}}}{2 \cdot 1} = \frac{9}{25} \text{ và } X_2 = \frac{1 + \sqrt{\frac{49}{625}}}{2} = \frac{16}{25}$$

Theo giả thiết, $AB > AC$, nên ta được:

$$AB^2 > AC^2 \Rightarrow \begin{cases} AB^2 = X_1 = \frac{16}{25} \\ AC^2 = X_2 = \frac{9}{25} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB = \frac{4}{5} \\ AC = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Vậy $AB = \frac{4}{5}\text{dm}$ và $AC = \frac{3}{5}\text{dm}$.

b) **Chứng minh $IA \perp DE$.**

Gọi F là giao điểm của AI và DE .

$$\text{Xét tứ giác } EHDA, \text{ ta có: } \begin{cases} \widehat{HEA} = 90^\circ & (HE \perp AC) \\ \widehat{HDA} = 90^\circ & (HD \perp AB) \\ \widehat{DAE} = 90^\circ & (\Delta ABC \text{ vuông tại } A) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $EHDA$ là hình chữ nhật (tứ giác có 3 góc vuông)

$\Rightarrow$ Tứ giác $EHDA$ là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{AHE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AE)

Mà $\widehat{AHE} = \widehat{ECH}$ (cùng phụ với $\widehat{CHE}$)

$\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{ECH} \Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{ACB}$ (1)

Xét ΔABC vuông tại A có I là trung điểm của BC

$\Rightarrow IA = IB = \frac{1}{2}BC$ (định lý đường trung tuyến trong tam giác vuông)

$\Rightarrow \Delta IAB$ cân tại $I \Rightarrow \widehat{IAB} = \widehat{IBA}$ (2)

Từ (1) và (2), ta suy ra: $\widehat{ADE} + \widehat{IAB} = \widehat{ACB} + \widehat{IBA} = \widehat{ACB} + \widehat{ABC} = 90^\circ$ (ΔABC vuông tại A)

Áp dụng định lý tổng 3 góc trong ΔADF , ta có:

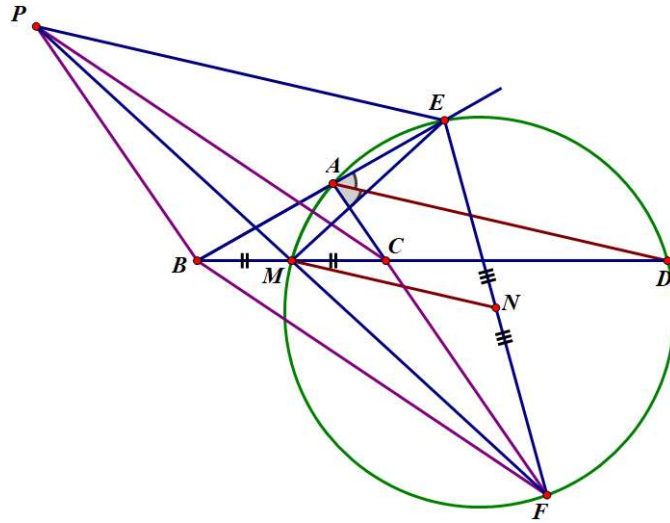
$$\begin{aligned} \widehat{FAD} + \widehat{FDA} + \widehat{AFD} &= 180^\circ \Rightarrow \widehat{AFD} = 180^\circ - (\widehat{FAD} + \widehat{FDA}) \\ &\Rightarrow \widehat{AFD} = 180^\circ - (\widehat{IAB} + \widehat{ACB}) \\ &\Rightarrow \widehat{AFD} = 180^\circ - (\widehat{ABC} + \widehat{ACB}) \\ &\Rightarrow \widehat{AFD} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \quad (\Delta ABC \text{ vuông tại } A) \end{aligned}$$

Do đó, $IA \perp DE$ (đpcm)

Câu 6. (1,0 điểm)

Cho tam giác ABC có đường phân giác ngoài của góc A cắt đường thẳng BC tại điểm D . Gọi M là trung điểm của BC . Đường tròn ngoại tiếp ΔADM cắt các đường thẳng AB , AC lần lượt tại E và F (với E , F khác A). Gọi N là trung điểm của EF . Chứng minh rằng $MN \parallel AD$.

Lời giải



Dựng hình bình hành $BPCF$.

$\Rightarrow$ Hai đường chéo BC và PF cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Mà M là trung điểm của BC (gt) $\Rightarrow M$ cũng là trung điểm của PF .

Xét $\triangle PEF$, ta có N là trung điểm của EF (gt), M là trung điểm của PF (cmt)

$\Rightarrow MN$ là đường trung bình của $\triangle PEF \Rightarrow MN \parallel EP$ (1)

Ta có: $\widehat{MPB} = \widehat{MFA}$ (cặp góc so le trong của $PB \parallel FA$, $PBFC$ là hình bình hành)

Mà $\widehat{MDA} = \widehat{MEA} = \widehat{MFA}$ (các góc nội tiếp cùng chắn cung AM)

$\Rightarrow \widehat{MEA} = \widehat{MPB}$, nghĩa là $\widehat{MEB} = \widehat{MPB}$

Xét tứ giác $BMEP$, ta có $\widehat{MEB} = \widehat{MPB}$ (cmt)

$\Rightarrow$ Tứ giác $BMEP$ nội tiếp (tứ giác có hai đỉnh kề cùng nhìn một cạnh dưới các góc bằng nhau)

$\Rightarrow \widehat{BEP} = \widehat{BMP}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BP)

Mà $\widehat{BMP} = \widehat{FMD}$ (đối đỉnh)

Mặt khác $\widehat{FMD} = \widehat{FAD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung FD)

$\Rightarrow \widehat{BEP} = \widehat{FAD}$, nghĩa là $\widehat{AEP} = \widehat{FAD}$ (2)

Ta có: AD là phân giác ngoài của $\widehat{BAC}$ (gt)

Mà $\widehat{BAC} + \widehat{CAE} = 180^\circ$ (kề bù)

$\Rightarrow AD$ là phân giác của $\widehat{CAE} \Rightarrow \widehat{FAD} = \widehat{EAD}$ (3)

Từ (2) và (3), ta suy ra $\widehat{AEP} = \widehat{EAD}$

Mà 2 góc nằm ở vị trí so le trong nên $EP \parallel AD$ (4)

Từ (1) và (4), ta suy ra $MN \parallel AD$ (đpcm).