

**ĐỀ THI TUYỂN SINH
VÀO TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN NĂM 2020**

Môn thi: Toán

(Dùng riêng cho thí sinh thi vào chuyên Toán, chuyên Tin học)

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

Bài 1. (2,0 điểm)

Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn đồng thời các điều kiện:
$$\begin{cases} 2x^3 = 3y^3 = 4z^3 \\ \sqrt[3]{2x^2 + 3y^2 + 4z^2} = 2 + \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{16} \\ xyz > 0 \end{cases}$$

Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

Bài 2. (2,0 điểm)

Xét phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ (1). Trong đó a, b, c là các số nguyên dương. Biết rằng các điều kiện sau được thỏa mãn: phương trình (1) có nghiệm; số $\overline{a2020b}$ chia hết cho 12; số $c^3 + 3$ chia hết cho $c + 3$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của tổng $a + b + c$.

Bài 3. (2,0 điểm)

Tìm số nguyên a nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức $x^4 + 2x^2 - 4x + a \geq 0$ đúng với mọi số thực x .

Bài 4. (3,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có $AB > BC$. Một đường tròn đi qua hai đỉnh A, C của tam giác ABC lần lượt cắt các cạnh AB, BC tại hai điểm K, N (K, N khác các đỉnh của tam giác ABC). Giả sử đường tròn (O) và đường tròn ngoại tiếp tam giác BKN cắt nhau tại giao điểm thứ hai là M với M khác B . Chứng minh rằng:

a) Ba đường thẳng BM, KN, AC đồng quy tại điểm P .

b) Tứ giác $MNCP$ nội tiếp.

c) $BM^2 - PM^2 = BK \cdot BA - PC \cdot PA$.

Bài 5. (1,0 điểm)

Cho hai số A, B có 2020 chữ số. Biết rằng số A có đúng 1945 chữ số khác 0 bao gồm 1930 chữ số ngoài cùng về bên trái và 15 chữ số ngoài cùng về bên phải, số B có đúng 1945 chữ số khác 0 bao gồm 1930 chữ số ngoài cùng về bên trái và 24 chữ số ngoài cùng về bên phải. Chứng minh rằng $UCLN(A; B)$ là một số có không quá 1954 chữ số.

----- HẾT -----

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 1.

Từ giả thiết thứ nhất, ta suy ra x, y, z là ba số cùng dấu. Mà $xyz > 0$ nên cả ba số x, y, z đều là số dương. Bây giờ, đặt $2x^3 = 3y^3 = 4z^3 = k$ ($k > 0$) thì ta có:

$$2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = \frac{2x^3}{x} + \frac{3y^3}{y} + \frac{4z^3}{z} = k \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$$

$$\text{Mà: } 2 + \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{\frac{4k}{x^3}} + \sqrt[3]{\frac{4k}{y^3}} + \sqrt[3]{\frac{4k}{z^3}} = \sqrt[3]{4k} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right).$$

Do đó, giả thiết thứ hai của bài toán có thể được viết lại thành

$$\sqrt[3]{k \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)} = \sqrt[3]{4k} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right).$$

$$\text{Từ đây, ta dễ dàng suy ra } P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}.$$

Bài 2

Từ giả thiết, ta suy ra a, b là các số có một chữ số.

Vì $c^3 + 3$ chia hết cho $c + 3$ nên $(c + 3)(c^2 - 3c + 9) - (c^3 + 3) = 24$ chia hết cho $c + 3$ (2).

Do phương trình (1) có nghiệm nên biệt thức của nó không âm, tức $b^2 - 4ac \geq 0$ (3).

Do $\overline{a2020b}$ chia hết cho 12 nên b chia hết cho 4 và $a + b + 1$ chia hết cho 3 (4).

Do b chia hết cho 4 và b nguyên dương nên $b = 4$ hoặc $b = 8$.

- Với $b = 4$, ta có $ac \leq 4$ (do (3)) và $a + 2$ chia hết cho 3 (do (4)). Kết hợp với (2), ta tìm được các cặp $(a; c)$ thỏa mãn là $(1; 1)$, $(1; 3)$ và $(4; 1)$.
- Với $b = 8$, ta có $ac \leq 16$ (do (3)) và a chia hết cho 3 (do (4)). Kết hợp với (2), ta tìm được các cặp $(a; c)$ thỏa mãn là $(3; 1)$, $(3; 3)$, $(3; 5)$, $(6; 1)$ và $(9; 1)$.

So sánh các kết quả, ta thấy $a + b + c$ lớn nhất là 18, đạt được khi $a = 9$, $b = 8$ và $c = 1$.

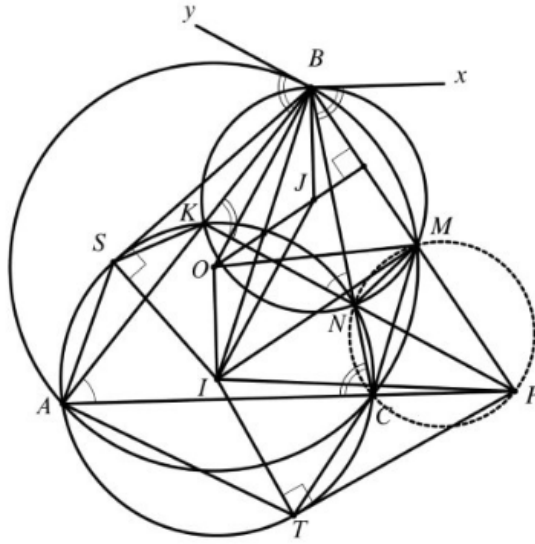
Bài 3.

Cho $x = \frac{1}{2}$, ta được $a - \frac{23}{16} \geq 0$, tức $a \geq \frac{23}{16}$. Mà a là số nguyên nên $a \geq 2$.

Mặt khác, với $a = 2$, ta có $x^4 + 2x^2 - 4x + 2 = x^4 + 2(x - 1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy $a = 2$ chính là số nguyên nhỏ nhất thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài 4.



a) Vì tam giác ABC không cân tại A nên AC, KN cắt nhau, và AC, BM phải cắt nhau. Gọi P là giao điểm của BM và AC . Ta có

$$\begin{aligned}\angle CPM &= \angle APB = 180^\circ - \angle ABP - \angle BAP \\ &= (180^\circ - \angle KBM) + (180^\circ - \angle CAK) - 180^\circ \\ &= \angle MKN + \angle CNK - 180^\circ = 360^\circ - \angle CNM - 180^\circ \\ &= 180^\circ - \angle CNM\end{aligned}$$

Suy ra tứ giác $CNMP$ nội tiếp. Từ đây, với chú ý các tứ giác $ACNK, ABMC$ nội tiếp, ta có

$$\angle CNP = \angle CMP = \angle CAB = \angle CAK = \angle BNK.$$

Mà hai góc CNP và BNK ở vị trí đối đỉnh nên ba điểm K, N, P thẳng hàng. Vậy AC, BM và KN đồng quy tại P .

b) Theo câu a), ta đã chứng minh tứ giác $MNCP$ nội tiếp.

c) Gọi $(I), (J)$ theo thứ tự là đường tròn ngoại tiếp các tam giác AKC, BKN .

Vẽ các tiếp tuyến Bx, By theo thứ tự của $(J), (O)$. Ta có $\angle xBN = \angle BKN = \angle NCA$. Mà hai góc này ở vị trí so le trong nên ta có $Bx \parallel AC$. Mà $JB \perp Bx$ nên $BJ \perp AC$. Tương tự, ta cũng có $\angle YBA = \angle BCA = \angle NCA = \angle BKN$ nên $By \parallel KN$, dẫn đến $BO \perp KN$.

Mặt khác, theo tính chất đường nối tâm hai đường tròn thì vuông góc với dây cung chung, ta có $OI \perp BM, IJ \perp KN$ và $OI \perp AC$. Do đó $BJ \parallel OI$ (cùng vuông góc với AC) và $OB \parallel IJ$ (cùng vuông góc với KN) nên tứ giác $BOIJ$ là hình bình hành. Hệ quả là OJ đi qua trung điểm BM (tính chất đường trung trực), nên OJ chứa đường trung bình tam giác BIM . Suy ra $OJ \parallel IM$, mà $OJ \perp BM$ nên $IM \perp BM$.

Kẻ các tiếp tuyến BS và CP đến đường tròn (I) như hình vẽ. Áp dụng định lý Pythagoras cho các tam giác vuông BIM và PIM, BIS và PIT , ta có

$$BM^2 - PM^2 = (BI^2 - IM^2) - (PI^2 - IM^2) = BI^2 - PI^2 = (BS^2 + IS^2) - (PT^2 + IT^2).$$

Mà $IS = IT$ nên $BM^2 - PM^2 = BS^2 - PT^2$ (1).

Để thấy các cặp tam giác BSA và BKS, PAT và PTC đồng dạng (g-g), ta suy ra

$$BS^2 = BA \cdot BK, \quad PT^2 = PC \cdot PA. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta suy ra $BM^2 - PM^2 = BA \cdot BK - PC \cdot PA$.

Bài 5.

Từ giả thiết, ta suy ra $A = 10^{90} \cdot a + b$ và $B = 10^{90} \cdot c + d$ với a, c là hai số có 1930 chữ số, b là số có 15 chữ số và d có 24 chữ số.

Đặt $x = \text{UCLN}(A; B)$ thì ta có $aB - cA$ chia hết cho x , thức $ad - bc$ chia hết cho x . (1)

Ta sẽ chứng minh $ad - bc$ khác 0. Thật vậy, giả sử $ad = bc$, khi đó ta có $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$.

Do a và c là hai số cùng có 1930 chữ số nên $\frac{c}{a} < \frac{10^{1930}}{10^{1929}} = 10$. Trong khi đó, vì d là số có 24 chữ số và b là số có 15 chữ số nên $\frac{d}{b} > \frac{10^{23}}{10^{15}} > 10$. Suy ra $\frac{d}{b} > 10 > \frac{c}{a}$, mâu thuẫn. Vậy $ad - bc \neq 0$.

Vì $ad - bc$ khác 0 nên từ (1), ta suy ra $|ad - bc| \geq x$. Mặt khác, ta lại có

- $ad < 10^{1930} \cdot 10^{24} = 10^{1954}$, tức ad có không quá 1954 chữ số.
- $bc < 10^{1930} \cdot 10^{15} = 10^{1945}$, tức bc có không quá 1945 chữ số.

Do đó, với chú ý $|ad - bc| < \max\{ad, bc\}$, ta suy ra $|ad - bc|$ là một số nguyên dương có không quá 1954 chữ số, từ đó x là một số có không quá 1954 chữ số (đpcm).

----- HẾT -----