ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐH KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN NĂM 2023

Đề chính thức

MÔN THI: TOÁN (cho tất cả các thí sinh)
Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu I. (3,5 điểm)

1) Giải phương trình
$$\sqrt{x^2+6x+2023}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x^2+5x+2025}+\sqrt{5}.$$

2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases}(x+6y)(3x+2y)=12,\\ 2x^3+6y^3+15x^2y+19y^2x+x+6y=12.\end{cases}$$

Câu II. (2,5 điểm)

1) Giả sử n là số nguyên sao cho $3n^3-1011$ chia hết cho 1008. Chứng minh rằng $n-1$ chia hết cho 48.

2) Với a,b,c là các số dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng
$$\left(1+\frac{1}{1+a^2}\right)\left(1+\frac{1}{1+b^2}\right)\left(1+\frac{1}{1+c^2}\right)>4.$$

Câu III. (3 điểm)

Cho hai đường tròn (O) và (O') cố định cắt nhau tại A và B sao cho O nằm ngoài (O') và O' nằm ngoài (O). Trên đường tròn (O) lấy điểm P di chuyển sao cho P nằm trong đường tròn (O'). Đường thẳng AP cắt (O') tại C khác A.

1) Chứng minh rằng hai tam giác OBP và $O'BC$ đồng dạng.

2) Gọi Q là giao điểm của hai đường thẳng OP và $O'C$. Chứng minh rằng $\widehat{QBC}+\widehat{ABP}=90^\circ$.

3) Lấy điểm D thuộc (O) sao cho AD vuông góc $O'C$. Chứng minh rằng trung điểm của đoạn thẳng DQ luôn nằm trên một đường tròn cố định khi P thay đổi.

Câu IV. (1 điểm)

Giả sử A là tập hợp con của tập hợp gồm 30 số tự nhiên đầu tiên $\{0,1,2,3,\ldots,29\}$ sao cho với k nguyên bất kỳ, $a,b\in A$ bất kỳ (có thể $a=b$) thì $a+b+30k$ không là tích của hai số nguyên liên tiếp. Chứng minh rằng số phần tử của tập hợp A nhỏ hơn hoặc bằng 10.

------HẾT------

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

2. PHẦN LỜI GIẢI

Câu 1: (3,5 điểm)

1. *Giải phương trình*

$$\sqrt{x^2+6x+2023}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x^2+5x+2025}+\sqrt{5}.$$

2. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}(x+6y)(3x+2y)=12\\ 2x^3+6y^3+15x^2y+19y^2x+x+6y=12.\end{cases}$$

Lời giải.

1. Điều kiện xác định: $x \geq -3$.

   Cách 1. Xét $x>2$ thì vì $(x^2+6x+2023)-(x^2+5x+2025)=x-2>0$ và $(x+3)-5=x-2>0$ nên suy ra

   $$\sqrt{x^2+6x+2023}+\sqrt{x+3}\geq\sqrt{x^2+5x+2025}+\sqrt{5}.$$

   Tương tự nếu $-3\leq x<2$ thì

   $$\sqrt{x^2+6x+2023}+\sqrt{x+3}\leq\sqrt{x^2+5x+2025}+\sqrt{5}.$$

   Do đó, ta phải có $x=2$ và nghiệm này thoả mãn điều kiện xác định. Vậy $x=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình

   Cách 2. Phương trình đã cho có thể viết lại thành

   $$\sqrt{x^2+6x+2023}-\sqrt{5}=\sqrt{x^2+5x+2025}-\sqrt{x+3}.$$

   Giả sử hai vế cùng dấu, bình phương hai vế và rút gọn, ta được

   $$\sqrt{5(x^2+6x+2023)}=\sqrt{(x^2+5x+2025)(x+3)}.$$

   Bình phương một lần nữa, khai triển và rút gọn, ta được

   $$(x-2)(x^2+5x+2020)=0.$$

   Vì $x^2+5x+2020=0$ vô nghiệm nên $x=2$ và nghiệm này thoả mãn.

   Vậy, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$.

2. Biến đổi phương trình thứ hai thành

   $$(x+6y)(2x^2+3xy+y^2+1)=12.$$

Kết hợp với phương trình thứ nhất ta suy ra

$$(x+6y)(3x+2y) = (x+6y)(2x^2+3xy+y^2+1).$$

Mà ta thấy $x+6y \neq 0$ nên chia cả hai vế phương trình trên cho $x+6y$ ta được

$$2x^2+3xy+y^2+1 = 3x+2y.$$

Biến đổi phương trình trên ta được

$$\begin{aligned} 0 &= 2x^2+3xy+y^2-3x-2y+1 \\ &= (2x+y)(x+y)-(2x+y)-(x+y)+1 \\ &= (2x+y-1)(x+y-1) \end{aligned}$$

nên suy ra $2x+y-1=0$ hoặc $x+y-1=0$.

- Nếu $2x+y-1=0$ thì ta có $y=1-2x$. Thay vào phương trình thứ nhất ta được

  $$(x+6-12x)(3x+2-4x) = 12.$$

  Giải phương trình ta thu được các nghiệm $(x,y) = (0,1), \left(\frac{28}{11}, \frac{-45}{11}\right)$.

- Nếu $x+y-1=0$ thì ta có $y=1-x$. Thay voà phương trình thứ nhất ta được

  $$(x+6-6x)(3x+2-2x) = 12.$$

  Giải phương trình ta thu được các nghiệm $(x,y) = (0,1), \left(\frac{-4}{5}, \frac{9}{5}\right)$.

Vậy, hệ đã cho có ba nghiệm $(x,y) = (0,1), \left(\frac{28}{11}, \frac{-45}{11}\right), \left(\frac{-4}{5}, \frac{9}{5}\right)$.

□

Câu 2: (2,5 điểm)

1) *Giả sử n là số nguyễn sao cho* $3n^3 - 1011$ *chia hết cho 1008. Chứng minh rằng* $n-1$ *chia hết cho 48 .*

2) *Với* a, b, c *là các số dương thỏa mãn điều kiện* $ab + bc + ca = 1$. *Chứng minh rằng*

$$\left(1+\frac{1}{1+a^2}\right)\left(1+\frac{1}{1+b^2}\right)\left(1+\frac{1}{1+c^2}\right) > 4.$$

Lời giải.

1. Ta có các biến đổi sau $1008 \mid 3n^3 - 1011 = 3n^3 - 3 - 1008$ khi và chỉ khi $1008 \mid 3n^3 - 3 = 3(n^3 - 1)$ tương đương với

$$336 \mid n^3 - 1 = (n-1)(n^2+n+1) = n^3 - n + n - 1.$$

Vì 336 chia hết cho 16 mà $n^2 + n + 1 = n(n+1) + 1$ lẻ nên $n - 1$ chia hết cho 16.
Ngoài ra vì 336 chia hết cho 3 mà $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$ tích ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 3 nên $n-1$ chia hết cho 3.
Vì $(3,16) = 1$ nên $n-1$ chia hết cho $3.16 = 48$. Phép chứng minh hoàn tất.

2. Ta cần chứng minh

$$\left(1+\frac{1}{1+a^2}\right)\left(1+\frac{1}{1+b^2}\right)\left(1+\frac{1}{1+c^2}\right) > 4. \qquad (1)$$

Ta biến đổi tương đương bất đẳng thức (1) như sau.

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow \left(\frac{2+a^2}{1+a^2}\right)\left(\frac{2+b^2}{1+b^2}\right)\left(\frac{2+c^2}{1+c^2}\right) > 4\\
&\Leftrightarrow \left(2+a^2\right)\left(2+b^2\right)\left(2+c^2\right) > 4\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)\\
&\Leftrightarrow 3\left(abc\right)^2 + 2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right) < 4\\
&\Leftrightarrow 3\left(abc\right)^2 + 2\left(\left(ab+bc+ac\right)^2 - 2abc\left(a+b+c\right)\right) < 4\\
&\Leftrightarrow 3\left(abc\right)^2 + 2\left(1 - 2abc\left(a+b+c\right)\right) < 4\\
&\Leftrightarrow 3\left(abc\right)^2 - 4abc\left(a+b+c\right) < 2. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức $AM - GM$ và giả thiết ta có $1 = ab + bc + ac \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ kéo theo $3\left(abc\right)^2 \leq \dfrac{1}{9} < 2$. Suy ra bất đẳng thức (2) đúng và bài toán được chứng minh.

$\square$

Câu 3: (3 điểm)

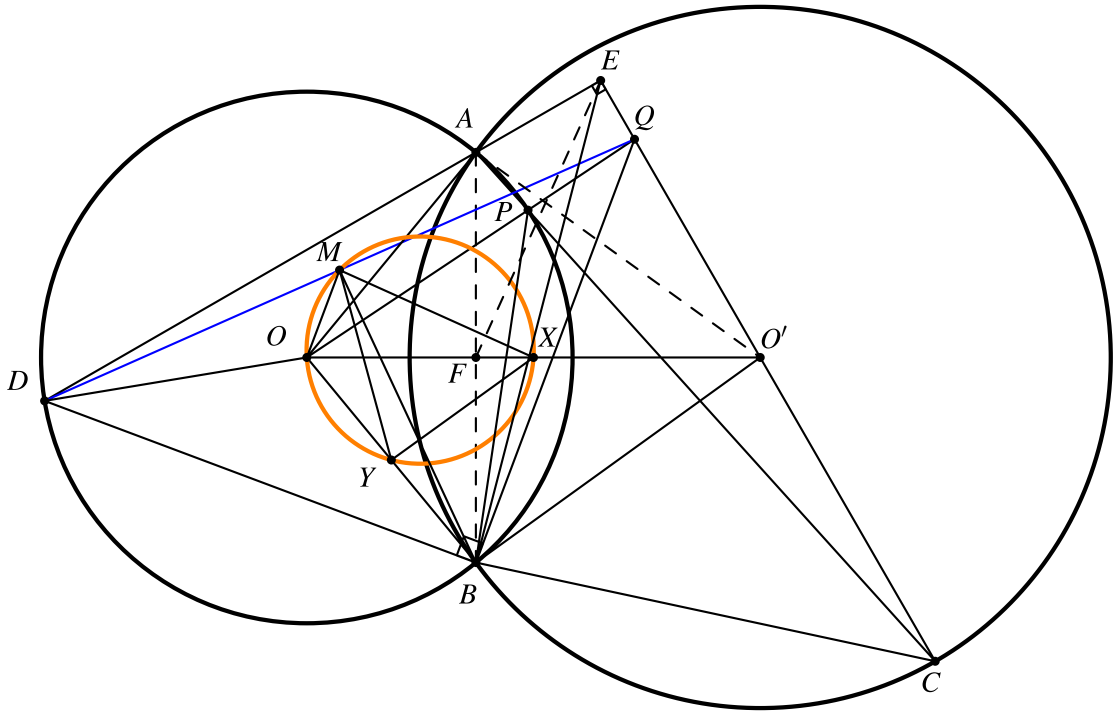
Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B sao cho O nằm ngoài (O') và O' nằm ngoài (O). Trên đường tròn (O) lấy điểm P di chuyển sao cho P nằm trong đường tròn (O'). Đường thẳng AP cắt (O') tại C khác A.

1) Chứng minh rằng hai tam giác OBP và $O'BC$ đồng dạng.

2) Gọi Q là giao điểm của hai đường thẳng OP và $O'C$. Chứng minh rằng

$$\widehat{QBC}+\widehat{ABP}=90^\circ.$$

3) Lấy điểm D thuộc (O) sao cho AD vuông góc với $O'C$. Chứng minh rằng trung điểm của đoạn thẳng DQ luôn nằm trên một đường tròn cố định khi P thay đổi.



Lời giải.

1. Ta có $\widehat{BOP}=2\widehat{BAP}=2\widehat{BAC}=\widehat{BO'C}$. Kết hợp với $\frac{OB}{OP}=\frac{O'B}{O'C}=1$, ta thu được $\triangle OBP\sim\triangle O'BC$.

2. Vì $\triangle OBP\sim\triangle O'BC$ nên ta được $\widehat{OPB}=\widehat{O'CB}$, từ đó kéo theo tứ giác $BCQP$ nội tiếp. Do đó, $\widehat{QBC}=\widehat{QPC}=\widehat{OPA}$. Hơn nữa, vì $\triangle OAP$ cân tại O nên ta được $\frac{1}{2}\widehat{AOP}+\widehat{OPA}=90^\circ$. Như vậy,
$$\widehat{QBC}+\widehat{ABP}=\widehat{OPA}+\frac{1}{2}\widehat{AOP}=90^\circ.$$

3. Gọi M là trung điểm của DQ. Đặt $AD\cap O'C=E$. Vì các tứ giác $BCQP$ và $ADBP$ nội tiếp nên ta được $\widehat{BQC}=\widehat{BPC}=\widehat{ADB}=\widehat{EDB}$, vì thế tứ giác $BDEQ$ nội tiếp đường tròn đường

kính DQ (với tâm đường tròn là M). Do đó, ta được

$$\widehat{BMO}=\frac{1}{2}\widehat{DMB}=\widehat{DEB}=\widehat{AEB}.$$

Mặt khác, ta cũng có

$$\widehat{BOM}=180^\circ-\frac{1}{2}\widehat{BOD}=180^\circ-\widehat{BAD}=\widehat{BAE}.$$

Như vậy, ta được $\triangle OBM\sim\triangle ABE$ (g.g). Gọi F,X,Y lần lượt là trung điểm của AB,OO',OB. Khi đó, MY và EF là các đường trung tuyến tương ứng của $\triangle OBM$ và $\triangle ABE$, vì thế ta được $\triangle OMY\sim\triangle AEF$. Kết hợp với việc tứ giác $AEO'F$ nội tiếp (vì $\widehat{AEO'}=\widehat{AFO'}=90^\circ$), XY là đường trung bình của $\triangle OBO'$ và sử dụng tính đối xứng, ta được

$$\widehat{OMY}=\widehat{AEF}=\widehat{AO'F}=\widehat{AO'O}=\widehat{BO'O}=\widehat{OXY}.$$

Như vậy, tứ giác $OMXY$ nội tiếp. Mặt khác, vì, O,B,O' là các điểm cố định nên X,Y cũng là các điểm cố định. Do vậy, điểm M luôn chạy trên đường tròn (OXY) cố định.

$\square$

Câu 4: (1 điểm)

Giả sử tập A là tập con của tập hợp gồm 30 số tự nhiên đầu tiên $\{0,1,2,...,29\}$ sao cho với k nguyên bất kỳ và $a,b \in A$ bất kỳ (có thể $a=b$) thì $a+b+30k$ không là tích của hai số nguyên liên tiếp. Chứng minh rằng số phần tử của tập hợp A nhỏ hơn hoặc bằng 10.

Lời giải. Ta trình bày hai lời giải

Cách 1. Trước hết ta loại các số mà bản thân nó không thể xuất hiện trong A, bao gồm:

- Các số có dạng $\dfrac{n(n+1)}{2}$: 0,1,3,6,10,15,24,28;
- Các số có dạng $\dfrac{n(n+1)+30}{2}$: 16,18,25;
- Các số có dạng $\dfrac{n(n+1)-30}{2}$: 13.

Đối với các số còn lại, ta ghép cặp chúng như sau:

$$(2,4),(5,7),(8,12),(9,11),(19,23),(20,22),(24,26),(27,29),14,17.$$

(gồm 8 cặp số và 2 số lẻ không trong cặp nào). Ta thấy các số không cùng một cặp không thể cùng thuộc A, cho nên A chỉ chứa đúng một số trong mỗi cặp. Do đó A chỉ có tối đa 10 phần tử.

Cách 2. Với hai số nguyên liên tiếp $a, a+1$, ta có $a(a+1) \equiv 0,2,6,12,20,26 \pmod{30}$. Với $a \in A$, xét $b=a$ và $k=0$ ta có $2a$ không đồng dư với $0,2,6,12,20,26 \pmod{30}$ nên a không đồng dư với $0,1,3,6,10,13,15,16,18,21,25,28 \pmod{30}$. Suy ra

$$A \subset B = \{2,4,5,7,8,9,11,12,14,17,19,20,22,23,24,26,27,29\}$$

và nếu phân hoạch B thành 10 tập

$$\{2,4\},\{5,7\},\{8,12\},\{11,9\},\{14,22\},\{17,19\},\{20\},\{23,27\},\{24,26\},\{29\}$$

thì mỗi tập con này chứa nhiều nhất một phần tử của A. Do đó, A chứa tối đa 10 phần tử.

Thực ra ta có thể chứng minh được số phần tử của A nhiều nhất bằng 10, chỉ cần chọn

$$A = \{2,5,8,11,14,17,20,23,26,29\}.$$

□