

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM NĂM 2023

Môn thi: TOÁN

(Dùng cho mọi thí sinh thi vào Trường THPT chuyên Đại học Sư phạm)
Thời gian làm bài: 90 phút (không kể thời gian phát đề)

Bài 1. (2,5 điểm) a) Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{x^2 + 8\sqrt{x}}{x - 2\sqrt{x} + 4} + \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{16 - 4x}{\sqrt{x} + 2} \text{ với } x > 0.$$

b) Một khay nước có nhiệt độ 125°F khi bắt đầu cho vào tủ đá. Ở trong tủ đá, cứ sau mỗi giờ, nhiệt độ của khay nước lại giảm đi 20%. Hỏi sau bao nhiêu giờ, nhiệt độ của khay nước chỉ còn là 64°F ?

Bài 2. (3,0 điểm) a) Cho phương trình $x^2 - (2m - 1)x - (m^2 + 1) = 0$ (1) (m là tham số). Chứng minh rằng với mọi giá trị của m , phương trình (1) luôn có hai nghiệm x_1, x_2 . Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 sao cho hệ thức đó không phụ thuộc vào m .

b) Cho parabol (P): $y = ax^2$ ($a \neq 0$) đi qua điểm $A\left(-1; \frac{1}{2}\right)$. Tìm tọa độ của điểm M trên parabol (P) sao cho khoảng cách từ điểm M đến trục tung gấp hai lần khoảng cách từ điểm M đến trục hoành.

Bài 3. (2,5 điểm) Cho hình bình hành ABCD có $\widehat{ABC} = 120^\circ$ và $BC = 2AB$. Vẽ đường tròn (O) có đường kính AC. Gọi E, F lần lượt là các giao điểm thứ hai của AB, AD với đường tròn (O). Đường thẳng EF lần lượt cắt các đường thẳng BC, BD tại H, S.

Chứng minh

a) Tam giác ABD là tam giác vuông.

b) Tứ giác OBEH là tứ giác nội tiếp.

c) SC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Bài 4. (1,0 điểm) Có hay không các số nguyên a, b sao cho

$$(a + b\sqrt{2023})^2 = 2024 + 2023\sqrt{2023}?$$

Bài 5. (1,0 điểm) Trên bảng ta viết đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

Ta viết lên bảng đa thức mới $P_1(x) = \frac{P(x+1) + P(x-1)}{2}$ rồi xóa đi đa thức $P(x)$.

Ta viết lên bảng đa thức mới $P_2(x) = \frac{P_1(x+1) + P_1(x-1)}{2}$ rồi xóa đi đa thức $P_1(x)$.

Ta cứ tiếp tục làm như thế nhiều lần.

Chứng minh rằng nếu cứ làm như vậy nhiều lần thì đến một lúc nào đó ta nhận được một đa thức không có nghiệm.

-----Hết-----

Ghi chú: Học sinh không được sử dụng tài liệu, cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ tên thí sinh: Số báo danh:

Đáp án đề thi vào lớp 10 môn Toán chuyên vòng 1 chuyên Đại Học Sư Phạm Hà Nội năm 2023

NGUYỄN TIỀN LÂM — NGUYỄN NHẬT HUY

NGÀY 1 THÁNG 6 NĂM 2023

Câu 1

a) Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{x^2 + 8\sqrt{x}}{x - 2\sqrt{x} + 4} + \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{16 - 4x}{\sqrt{x} + 1} \quad (x > 0)$$

b) Một khay nước có nhiệt độ 125°F khi bắt đầu cho vào tủ đá. Ở trong tủ đá, cứ sau mỗi giờ, nhiệt độ khay nước lại giảm đi 20%. Hỏi sau bao nhiêu giờ, nhiệt độ khay nước chỉ còn là 64°F .

Lời giải.

a) Đặt $\sqrt{x} = a$, suy ra $x = a^2$. Khi đó ta được biểu thức

$$\begin{aligned} A &= \frac{a^4 + 8a}{a^2 - 2a + 4} + \frac{2a^2 + a}{a} + \frac{16 - 4a^2}{a + 2} \\ &= \frac{a(a + 2)(a^2 - 2a + 4)}{a^2 - 2a + 4} + \frac{2a^2 + a}{a} + \frac{16 - 4a^2}{a + 2} \\ &= a(a + 2) + 2a + 1 - 4(a - 2) \\ &= a^2 + 9 \\ &= x + 9. \end{aligned}$$

b) Nhiệt độ của khay nước sau mỗi giờ còn lại $80\% = \frac{4}{5}$. Gọi t (giờ) là thời gian để nhiệt độ giảm về 64°F . Khi đó ta có phương trình sau

$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{5}\right)^t \cdot 125 &= 64 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^t = \frac{64}{125} = \left(\frac{4}{5}\right)^3 \\ &\Leftrightarrow t = 3. \end{aligned}$$

Vậy sau 3 giờ nhiệt độ của khay đá giảm về 64°F .



Câu 2

a) Cho phương trình:

$$x^2 - (2m - 1)x - (m^2 + 1) = 0 \quad (m \text{ là tham số}) \quad (1)$$

Chứng minh rằng với mọi giá trị của m , phương trình (1) luôn có hai nghiệm x_1, x_2 .
Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 sao cho hệ thức đó không phụ thuộc vào m .

b) Cho parabol $(D) : y = ax^2$ ($a \neq 0$) đi qua $A\left(-1; \frac{-1}{2}\right)$. Tìm tọa độ điểm M trên (P) sao cho khoảng cách từ M đến trục tung gấp hai lần khoảng cách từ M đến trục hoành.

Lời giải.

a) Ta có $\Delta_{(1)} = [-(2m - 1)]^2 - 4.1.[-(m^2 + 1)] = (2m - 1)^2 + 4m^2 + 4 > 0$, vì thế với mọi m , phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Theo hệ thức Vi-et thì $x_1 + x_2 = 2m - 1$ và $x_1.x_2 = -(m^2 + 1)$. Khi đó ta được

$$\begin{cases} 4m^2 = (x_1 + x_2 + 1)^2 \\ m^2 = -1 - x_1.x_2 \end{cases}$$

Từ đây ta được $(x_1 + x_2 + 1)^2 + 4x_1x_2 + 4 = 0$. Hệ thức này không phụ thuộc vào m .
Bài toán được chứng minh.

b) Do parabol $(P) : y = ax^2$ ($a \neq 0$) đi qua điểm $A\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ nên

$$a \cdot (-1)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Khi đó parabol $(P) : y = \frac{1}{2}x^2$, ta đặt $M\left(x_M; \frac{1}{2}x_M^2\right)$. Tức là khoảng cách từ điểm M đến trục tung là x_M , khoảng cách từ điểm M đến trục hoành là $\frac{1}{2}x_M^2$.

Do khoảng cách từ M đến trục tung gấp hai lần khoảng cách từ M đến trục hoành nên

$$\begin{aligned} x_M &= 2 \cdot \frac{1}{2}x_M^2 \Leftrightarrow x_M = x_M^2 \\ &\Leftrightarrow x_M(x_M - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x_M = 0 \text{ hoặc } x_M = 1. \end{aligned}$$

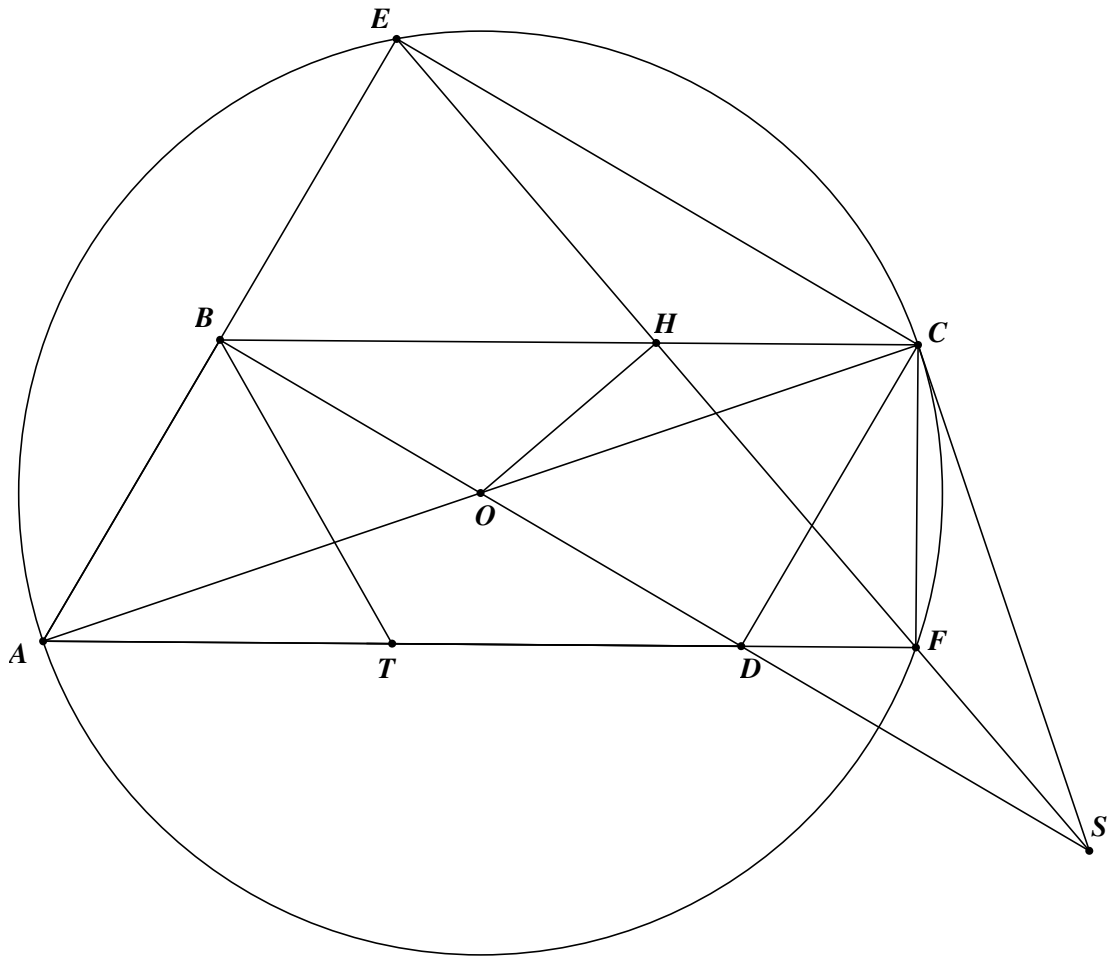
Vậy tất cả tọa độ điểm M thỏa mãn bài toán là $M(0; 0)$ hoặc $M\left(1; \frac{1}{2}\right)$.



Câu 3 Cho hình bình hành $ABCD$ có $\widehat{ABC} = 120^\circ$ và $BC = 2AB$. Dựng đường tròn (O) có đường kính AC . Gọi E, F lần lượt là các giao điểm thứ hai của AB, AD với đường tròn (O) . Đường thẳng EF lần lượt cắt các đường thẳng BC, BD tại H, S . Chứng minh

- Tam giác ABD là tam giác vuông.
- Tứ giác $OBEH$ là tứ giác nội tiếp.
- SC là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Lời giải.



- Gọi T là trung điểm của AD . Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $BC = AD$, $BC \parallel AD$ nên

$$\widehat{BAD} = 180^\circ - \widehat{ABC} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

và $TA = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC = AB$ nên tam giác ABT đều suy ra $TB = TA = TD$.

Từ đây ta được B thuộc đường tròn đường kính AT hay $\widehat{ABD} = 90^\circ$.

Bài toán được chứng minh.

- Theo câu a) từ $\widehat{ABD} = 90^\circ$ ta được $OB \perp AE$ nên B là trung điểm của AE .
Mà $BH \parallel AF$ nên BH là đường trung bình của tam giác EAF .

Do đó H là trung điểm EF . Vì EF là dây cung của (O) nên $\widehat{OHE} = 90^\circ = \widehat{OBE}$.
 Từ đây ta suy ra $OBEH$ nội tiếp đường tròn đường kính OE .
 Bài toán được chứng minh.

c) Vì $AECF$ là tứ giác nội tiếp, $BO \parallel CE$ (cùng vuông góc với AB) và $BH \parallel AF$ ta có

$$\widehat{COS} = \widehat{COD} = \widehat{AOB} = \widehat{ECA} = \widehat{EFA} = \widehat{EHB} = \widehat{CHF} = \widehat{CHS}$$

Từ đây ta được tứ giác $CHOS$ nội tiếp suy ra $\widehat{OCS} = \widehat{OHS} = \widehat{OHE} = 90^\circ$.
 Vậy SC là tiếp tuyến của đường tròn (O) . Bài toán được chứng minh.

▽

Câu 4 Có hay không các số nguyên a, b sao cho

$$(a + b\sqrt{2023})^2 = 2024 + 2023\sqrt{2023}?$$

Lời giải. Giả sử tồn tại a, b là các số nguyên thỏa mãn

$$(a + b\sqrt{2023})^2 = 2024 + 2023\sqrt{2023}.$$

Từ đây ta suy ra

$$a^2 + 2023b^2 + 2ab\sqrt{2023} = 2024 + 2023\sqrt{2023}.$$

Khi đó ta được

$$(2ab - 2023)\sqrt{2023} = 2024 - a^2 - 2023b^2.$$

Vì a, b là các số nguyên nên $2ab - 2023 \neq 0$. Từ đó ta có $\sqrt{2023} = \frac{2024 - a^2 - 2023b^2}{2ab - 2023}$.

Điều này vô lý, vì $\sqrt{2023}$ là số vô tỷ và $\frac{2024 - a^2 - 2023b^2}{2ab - 2023}$ là số hữu tỷ.

Vậy câu trả lời là không tồn tại các số nguyên a, b sao cho

$$(a + b\sqrt{2023})^2 = 2024 + 2023\sqrt{2023}.$$

▽

Câu 5 Trên bảng ta viết đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

Ta viết lên bảng đa thức mới $P_1(x) = \frac{P(x+1) + P(x-1)}{2}$ rồi xóa đi đa thức $P(x)$.

Ta viết lên bảng đa thức mới $P_2(x) = \frac{P_1(x+1) + P_1(x-1)}{2}$ rồi xóa đi đa thức $P_1(x)$.

Ta cứ tiếp tục làm như thế nhiều lần.

Chứng minh rằng nếu cứ làm như vậy nhiều lần thì đến một lúc nào đó ta nhận được một đa thức không có nghiệm.

Lời giải. Bằng các phép biến đổi ta có các đẳng thức sau

$$P_1(x) = \frac{P(x+1) + P(x-1)}{2} = ax^2 + bx + c + a.$$

$$P_2(x) = \frac{P_1(x+1) + P_1(x-1)}{2} = ax^2 + bx + c + 2a.$$

Tương tự như vậy bằng phép quy nạp, ta có

$$P_n(x) = ax^2 + bx + c + na, \text{ với } n \in \mathbb{Z}^+$$

Lúc này, ta có

$$\Delta_{P_n} = b^2 - 4a(c + na) = (b^2 - 4ac) - 4na^2.$$

Xét các số nguyên dương n thỏa mãn $n > \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ (vì $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ không đổi) thì $\Delta_{P_n} < 0$.
 Khi đó đa thức $P_n(x)$ không có nghiệm. Bài toán được chứng minh. ▽