

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm 01 trang)

Ngày thi: 31 tháng 5 năm 2023

Môn thi: TOÁN (Vòng 2) – CHUYÊN TOÁN

Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1. (2,0 điểm)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{x-3}{x-\sqrt{x}+1} - 1 \right) : \left(\frac{2x+1}{x\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right)$ với $x > 0$.

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x+1)^2 - y^2 + 4y - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 = 17 \end{cases}$$

b) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d): $y = (m+1)x - 2m + 3$ (m là tham số) và parabol (P): $y = x^2$. Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ hai giao điểm, xác định m để $|x_1|, |x_2|$ là độ dài hai cạnh của một hình chữ nhật có độ dài đường chéo bằng $\sqrt{10}$.

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Tìm tất cả các số nguyên n để $A = n^2 + 4n + 7$ là một số chính phương.

b) Chứng minh rằng $M = (p-1)(p+1)$ chia hết cho 12 với p là số nguyên tố lớn hơn 3.

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B. Điểm C thuộc đường tròn (O) sao cho C và O cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB. Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại điểm C cắt đường thẳng AB tại D. Đường tròn tâm D bán kính DC cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai E, cắt đường tròn (O') tại F và G trong đó F nằm bên trong đường tròn (O). Gọi H là giao điểm của DO với CE, K là giao điểm của DO' và FG.

a) Chứng minh $DC^2 = DA \cdot DB$ và DG là tiếp tuyến của đường tròn (O').

b) Chứng minh tứ giác OHKO' nội tiếp.

c) Chứng minh CE, FG và AB đồng quy.

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{4a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{a^2 + 4b^2 + c^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 + 4c^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Hết

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm 01 trang)

Câu 1. (2,0 điểm)

Cho biểu thức $A = \frac{3x + 6\sqrt{x} - 12}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{x} - 2}{1 - \sqrt{x}}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm giá trị lớn nhất của A.

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $3x - 8\sqrt{x} - 3 = 0$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 2 = 3y \\ y^2 + 2 = 3x \end{cases}$.

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Cho phương trình $x^2 + (m-1)x - m^2 - 2 = 0$ (1) (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) thỏa mãn $2|x_1| - |x_2| = 4$.

b) Cho hai số tự nhiên a, b thỏa mãn $2a^2 + a = 3b^2 + b$. Chứng minh $2a + 2b + 1$ là số chính phương.

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho đường tròn (O) và M là một điểm nằm bên ngoài đường tròn. Từ M vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O) (A, B là các tiếp điểm). Gọi C là một điểm trên cung nhỏ AB và D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của C trên các đường thẳng AB, AM, BM. Gọi H là giao điểm của CA và DE, K là giao điểm của BC và DF.

a) Chứng minh tứ giác ADCE nội tiếp và $CD^2 = CE \cdot CF$.

b) Chứng minh tứ giác CHDK nội tiếp và HK // AB.

c) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác DHK và đường tròn (O) tiếp xúc với nhau.

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho bảng ô vuông kích thước 100×100 . Người ta viết các số tự nhiên từ 1 đến 2023 vào bảng theo quy luật như hình vẽ bên. Hỏi số 2023 nằm ở hàng bao nhiêu và cột bao nhiêu? (Ví dụ số 8 nằm ở hàng 3 và cột 2)

	cột 1	cột 2	...			
hàng 1	1	3	6	10	...	
hàng 2	2	5	9	...		
...	4	8	...			
	7	...				
	...					