SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HẢI PHÒNG

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
Năm học 2021 – 2022

ĐỀ THI MÔN TOÁN

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)
Lưu ý: Đề thi gồm 01 trang, thí sinh làm bài vào tờ giấy thi

Bài 1. (2 điểm)

1) Cho biểu thức $A=\left(\dfrac{1}{x\sqrt{x}-1}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{x-1}\right).\left(\sqrt{x}-4+\dfrac{4\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1}\right)$ (với $x\ge 0,\ x\ne 1$).

Rút gọn biểu thức A và tìm tất cả các giá trị của x để $A\ge 2$.

2) Cho hai phương trình (ẩn x; tham số a, b)

$$x^2+ax+b=0 \qquad (1)$$
$$x^2+bx+2a=0 \qquad (2)$$

Tìm tất cả các cặp số thực $(a;b)$ để mỗi phương trình trên đều có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_2-x_1=x_0$, trong đó x_0 là nghiệm chung của hai phương trình và x_1, x_2 lần lượt là hai nghiệm còn lại của phương trình (1), phương trình (2).

Bài 2. (2 điểm)

1) Giải phương trình $\sqrt{3x+2}-2\sqrt{x}=2-x$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2+xy=x+4\\ y^2+2xy=y-4\end{cases}$.

Bài 3. (3 điểm) Cho tam giác nhọn ABC $(AB\ne AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi I là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc $\widehat{BAC}$ của tam giác ABC. Đường thẳng AI cắt BC tại D, cắt đường tròn (O) tại E $(E\ne A)$.

a) Chứng minh E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC.

b) Kẻ IH vuông góc với BC tại H. Đường thẳng EH cắt đường tròn (O) tại F $(F\ne E)$. Chứng minh $AF\perp FI$.

c) Đường thẳng FD cắt đường tròn (O) tại M $(M\ne F)$, đường thẳng IM cắt đường tròn (O) tại N $(N\ne M)$. Đường thẳng qua O song song với FI cắt AI tại J, đường thẳng qua J song song với AH cắt IH tại P. Chứng minh ba điểm N, E, P thẳng hàng.

Bài 4. (1 điểm) Cho các số thực dương x, y, z. Chứng minh rằng

$$\frac{x\sqrt{xy}}{\sqrt{2x+y}}+\frac{y\sqrt{yz}}{\sqrt{2y+z}}+\frac{z\sqrt{zx}}{\sqrt{2z+x}}\ge\sqrt{3xyz}.$$

Bài 5. (2 điểm)

1) Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn $y^4+2y^2-3=x^2-3x$.

2) Cho tập hợp $X=\{1;2;3;...;101\}$. Tìm số tự nhiên n $(n\ge 3)$ nhỏ nhất sao cho với mọi tập con A tùy ý gồm n phần tử của X đều tồn tại 3 phần tử đôi một phân biệt $a, b, c\in A$ thỏa mãn $a+b=c$.

------- HẾT -------

Họ tên thí sinh:.....Số báo danh: .....
Cán bộ coi thi 1:.....Cán bộ coi thi 2:.....

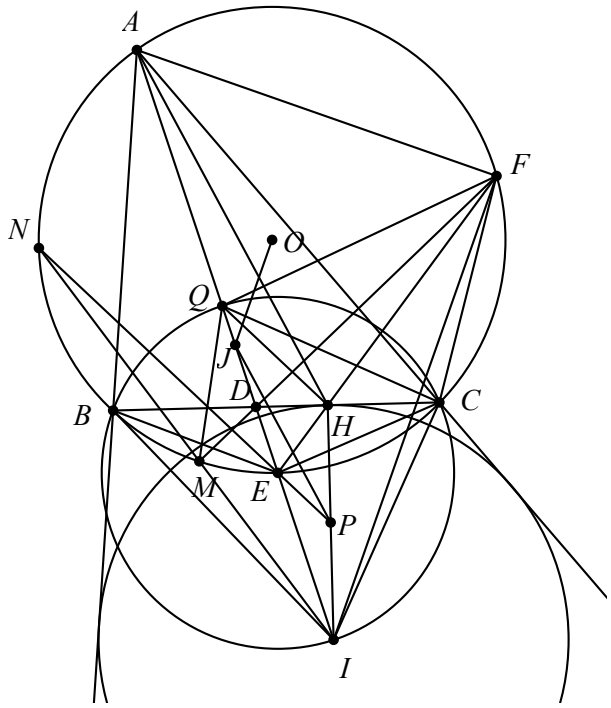
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HẢI PHÒNG

HDC ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
Năm học 2021 – 2022
HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN CHUYÊN

Hướng dẫn gồm 04 trang

Bài	Đáp án	Điểm
1 (2,0 điểm)	**1) (1,0 điểm)**	
	$A=\left(\dfrac{1}{x\sqrt{x}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right).\dfrac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$	**0,25**
	$=\dfrac{-\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}.\dfrac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$	**0,25**
	$A\ge 2\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\ge 2\Leftrightarrow\dfrac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}}\ge 0$	**0,25**
	$\Leftrightarrow\dfrac{2}{3}\le\sqrt{x}<1\Leftrightarrow\dfrac{4}{9}\le x<1$ (TMĐK).	**0,25**
	2) (1,0 điểm)	
	Có $\begin{cases}x_0^2+ax_0+b=0\\x_0^2+bx_0+2a=0\end{cases}\Rightarrow(a-b)x_0=2a-b\Rightarrow x_0=\dfrac{2a-b}{a-b}$ (vì nếu $a-b=0\Rightarrow 2a-b=0\Rightarrow a=b=0(l)$)	**0,5**
	$x_2=x_0+x_1=-a$, thay vào (2): $a^2-ab+2a=0\Leftrightarrow a(a-b+2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\a-b+2=0\end{array}\right.$. +TH1: $a=0\Rightarrow x_0=1$, thay vào (1): $b=-1$ (tm bài toán)	**0,25**
	+TH2: $a-b+2=0\Rightarrow\begin{cases}x_0=\dfrac{2-a}{2}\\b=a+2\end{cases}$ thay vào (1): $a^2-8a+12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=2;b=4(l)\\a=6;b=8(tmbt)\end{array}\right.$. Vậy có hai cặp số $(0;-1),(6;8)$ thỏa mãn đề bài.	**0,25**
2 (2,0 điểm)	**1) (1,0 điểm)**	
	ĐKXĐ: $x\ge 0$. PT $\Leftrightarrow\dfrac{2-x}{\sqrt{3x+2}+2\sqrt{x}}=2-x\Leftrightarrow(2-x)\left(\dfrac{1}{\sqrt{3x+2}+2\sqrt{x}}-1\right)=0$	**0,5**
	$\dfrac{1}{\sqrt{3x+2}+2\sqrt{x}}\le\dfrac{1}{\sqrt{2}}<1,\forall x\ge 0$ nên phương trình $\dfrac{1}{\sqrt{3x+2}+2\sqrt{x}}-1=0$ vô nghiệm.	**0,25**
	Với $x-2=0\Leftrightarrow x=2$ (TMĐKXĐ)	**0,25**
	b) (1,0 điểm)	
	$\begin{cases}x^2+y^2+xy=x+4\\y^2+2xy=y-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+2y^2+3xy-x-y=0\\y^2+2xy-y+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+2y-1)(x+y)=0\\y^2+2xy-y+4=0\end{cases}\quad(2)$	**0,5**
	$x+2y-1=0\Rightarrow x=1-2y$. Thay vào (2): $3y^2-y-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-1;x=3\\y=\dfrac{4}{3};x=-\dfrac{5}{3}\end{array}\right.$	**0,25**
	$x+y=0\Rightarrow x=-y$. Thay vào (2): $y^2+y-4=0\Leftrightarrow y=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2}=-x$ Vậy hệ phương trình có 4 nghiệm $(3;-1),\left(-\dfrac{5}{3};\dfrac{4}{3}\right),\left(\dfrac{1+\sqrt{17}}{2};\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}\right),\left(\dfrac{1-\sqrt{17}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$	**0,25**

3 (3,0 điểm)	**a) (1,0 điểm)**	
		
	Có AI là phân giác góc $\widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{CAE} \Rightarrow EB = EC$ (1)	**0,5**
	Có $\widehat{EBI} = \widehat{CBI} - \widehat{CBE} = \frac{180° - \widehat{ABC}}{2} - \frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{\widehat{ACB}}{2} = \frac{\widehat{AEB}}{2} \Rightarrow \Delta BEI$ cân tại $E \Rightarrow EB = EI$ (2) Từ (1) và (2) suy ra E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCI.	**0,5**
	b) (1,0 điểm)	
	$\widehat{IAF} = \widehat{DHE}$ $\left(= \frac{1}{2} sđ\widehat{EF} = \frac{1}{2}\left(sđ\widehat{FC} + sđ\widehat{BE} \right) \right)$	**0,25**
	$\Delta FCE \# \Delta CHE \Rightarrow EC^2 = EF.EH \Rightarrow EI^2 = EF.EH \Rightarrow \Delta EIH \# \Delta EFI \Rightarrow \widehat{EHI} = \widehat{EIF}$.	**0,5**
	Suy ra $\widehat{IAF} + \widehat{AIF} = \widehat{DHE} + \widehat{EHI} = 90° \Rightarrow AF \perp FI$.	**0,25**
	c) (1,0 điểm)	
	$OJ \parallel FI$ nên $OJ \perp AF \Rightarrow J$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta AFI \Rightarrow J$ là trung điểm $AI \Rightarrow P$ là trung điểm của IH.	**0,25**
	Gọi Q là điểm đối xứng với I qua E. Có $DQ.DI = DM.DF \left(= DB.DC \right) \Rightarrow MQFI$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{QFM} = \widehat{QIM}$, mà $\widehat{MNE} = \widehat{MFE}$ $\Rightarrow \widehat{NEQ} = \widehat{QFE}$.	**0,25**
	$EQ^2 = EI^2 = EH.EF \Rightarrow \Delta EQH \# \Delta EFQ \Rightarrow \widehat{QFE} = \widehat{HQE}$.	**0,25**
	Suy ra $\widehat{NEQ} = \widehat{HQE} \left(= \widehat{QFE} \right) \Rightarrow EN \parallel QH$. Mà E là trung điểm của IQ nên EN đi qua trung điểm P của IH hay N, E, P thẳng hàng.	**0,25**

4 (1,0 điểm)	BĐT $\Leftrightarrow P=\dfrac{x}{\sqrt{z(2x+y)}}+\dfrac{y}{\sqrt{x(2y+z)}}+\dfrac{z}{\sqrt{y(2z+x)}}\ge\sqrt{3}$	**0,25**
	$P\ge 2\sqrt{3}\left(\dfrac{x}{3z+2x+y}+\dfrac{y}{3x+2y+z}+\dfrac{z}{3y+2z+x}\right)$ (BĐT Côsi)	**0,25**
	$=2\sqrt{3}\left(\dfrac{x^2}{x(3z+2x+y)}+\dfrac{y^2}{y(3x+2y+z)}+\dfrac{z^2}{z(3y+2z+x)}\right)$ $\ge\dfrac{2\sqrt{3}(x+y+z)^2}{2(x^2+y^2+z^2)+4(xy+yz+xz)}=\sqrt{3}$ (BĐT Bunhiacopxki) (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z$.	**0,5**
5 (2,0 điểm)	**a) (1,0 điểm)**	
	PT $\Leftrightarrow 4y^4+8y^2-12=4x^2-12x\Leftrightarrow(2y^2+2)^2-(2x-3)^2=7\Leftrightarrow(2y^2+2x-1)(2y^2-2x+5)=7$	**0,5**
	Với x, y nguyên dương thì $2y^2+2x-1>0$ nên $\begin{cases}2y^2+2x-1=1\\2y^2-2x+5=7\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}2y^2+2x-1=7\\2y^2-2x+5=1\end{cases}$	**0,25**
	$\begin{cases}2y^2+2x-1=1\\2y^2-2x+5=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x-6=-6\\2y^2+2x-1=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=\pm1\end{cases}$ (loại). $\begin{cases}2y^2+2x-1=7\\2y^2-2x+5=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x-6=6\\2y^2+2x-1=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=\pm1\end{cases}$, loại trường hợp $y=-1$. Vậy phương trình có nghiệm $(x;y)=(3;1)$.	**0,25**
	b) (1,0 điểm)	
	Cách 1: Dễ thấy tập hợp gồm 51 các số lẻ không thỏa mãn điều kiện của đề bài. Ta sẽ chứng minh n nhỏ nhất bằng 52.	**0,25**
	Xét một tập $A\subset X$ và $\lvert A\rvert=52$ có các phần tử được sắp xếp $a_1<a_2<...<a_{52}\ (1\le a_1\le 50)$. Nếu $a_1=1$ thì trong 51 số còn lại của A luôn tồn tại 2 số nguyên liên tiếp, thỏa mãn điều kiện đề bài.	**0,25**
	Ta chia các số $a_1+1, a_1+2,...,101$ vào các tập B_i gồm các phần tử k sao cho $k\equiv i(\mathrm{mod}\,a_1)$, $i=\overline{1,a_1}$ $\Rightarrow\lvert B_i\rvert=\left[\dfrac{101-i}{a_1}\right]$. (ở đây ta kí hiệu $[a]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá số thực a) Nếu $101\vdots a_1$ và $51\vdots a_1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a_1=3\\a_1=17\end{array}\right.$ Ta xét trường hợp $a_1=3$, trường hợp $a_1=17$ tương tự. $\lvert B_1\rvert=33, \lvert B_2\rvert=33, \lvert B_3\rvert=32$. Trong 51 số còn lại của A mỗi tập B_1, B_2 chỉ có thể chứa nhiều nhất 17 số, nếu không sẽ tồn tại hai phần tử có hiệu bằng 3. Vậy tập B_3 chứa ít nhất 17 số nên trong B_3 chứa ít nhất hai phần tử có hiệu bằng 3.	**0,25**

	Nếu $51 \not\vdots a_1$, do $\left[\frac{51}{a_1}\right]+1>\frac{1}{2}\left[\frac{101-i}{a_1}\right]$, $\forall i=\overline{1,a_1}$ nên mỗi tập $B_i\left(i=\overline{1,a_1-1}\right)$ chỉ chứa tối đa $\left[\frac{51}{a_1}\right]+1$ phần tử trong 51 phần tử còn lại của A. $\Rightarrow B_{a_1}$ chứa ít nhất $51-(a_1-1)\left(\left[\frac{51}{a_1}\right]+1\right)$ trong 51 phần tử còn lại của A. Ta chứng minh $51-(a_1-1)\left(\left[\frac{51}{a_1}\right]+1\right)>\left\|B_{a_1}\right\|=\frac{1}{2}\left(\left[\frac{101}{a_1}\right]-1\right)$ $\Leftrightarrow 52,5+\left[\frac{51}{a_1}\right]>\frac{1}{2}\left[\frac{101}{a_1}\right]+a_1\left[\frac{51}{a_1}\right]$. Do $\frac{1}{2}\left[\frac{101}{a_1}\right]+a_1\left[\frac{51}{a_1}\right]<51+\frac{50,5}{a_1}<52,5+\left[\frac{51}{a_1}\right]$ nên trong B_{a_1} có quá nửa số phần tử thuộc $A\Rightarrow$ trong B_{a_1} chứa ít nhất 2 phần tử a_m,a_n thỏa mãn $a_m-a_n=a_1$, trừ trường hợp $\left\|B_{a_1}\right\|$ lẻ. Nếu B_{a_1} có 3 phần tử, tồn tại tập B_j nào đó có 4 phần tử chứa ít nhất 3 phần tử của A thỏa mãn có hai phần tử có hiệu bằng a_1. Nếu $\left\|B_{a_1}\right\|\geq 5$, khi đó các phần tử $2a_1,4a_1,6a_1\in A$ thỏa mãn $2a_1+4a_1=6a_1$. Ta có đpcm trong mọi trường hợp $\|A\|=52$.	**0,25**
	Cách 2: Bổ đề: Xét tập $A\subset X$ sao cho không tồn tại 3 phần tử đôi một phân biệt $a, b, c\in A$ thỏa mãn $a+b=c$. Gọi $x=\min A; k=\left[\frac{101}{x}\right]$. Khi đó a) Trong tập $B_m=\{x+2mx+1;x+2mx+2;...;3x+2mx\}$ có nhiều nhất x số thuộc A (1). b) $\|A\|\leq 51$. a) Ta có $a\notin A$ hoặc $a+x\notin A$ suy ra (1) được chứng minh. b) TH1: $k=2n$. (1) $\Rightarrow\|A\|\leq 1+n.x=1+\frac{1}{2}.\left[\frac{101}{x}\right]\leq 51,5\Rightarrow\|A\|\leq 51$. TH2: $k=2n+1$.(1) $\Rightarrow\|A\|\leq 1+n.x+(101-x-2nx)=102-x(1+n)\leq 102-x.\frac{101}{2x}=51,5\Rightarrow\|A\|\leq 51$. Vậy $\|A\|\leq 51$, bổ đề được chứng minh. Suy ra n nhỏ nhất bằng 52 thỏa mãn bài toán.	

<u>Chú ý:</u>- *Trên đây chỉ trình bày tóm tắt một cách giải, nếu thí sinh làm theo cách khác mà đúng thì cho điểm tối đa ứng với điểm của câu đó trong biểu điểm.*

- Thí sinh làm đúng đến đâu cho điểm đến đó theo đúng biểu điểm.

- Trong một câu, nếu thí sinh làm phần trên sai, dưới đúng thì không chấm điểm.

- Bài hình học, thí sinh vẽ hình sai thì không chấm điểm. Thí sinh không vẽ hình mà làm vẫn làm đúng thì cho nửa số điểm của các câu làm được.

- Bài có nhiều ý liên quan tới nhau, nếu thí sinh công nhận ý trên để làm ý dưới mà thí sinh làm đúng thì chấm điểm ý đó.

- Điểm của bài thi là tổng điểm các câu làm đúng và không được làm tròn.