SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO AN GIANG	KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT Năm học 2021-2022 Khóa ngày 29/05/2021
ĐỀ CHÍNH THỨC *(Đề thi gồm có 01 trang)*	**Môn thi: TOÁN CHUYÊN** *Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian phát đề*

Bài 1. (3,0 điểm)

a. Rút gọn $A = \sqrt{419 - 40\sqrt{19}} + \sqrt{419 + 40\sqrt{19}}$.

b. Giải phương trình $2x^2 + (2\sqrt{3} + 3)x + 3\sqrt{3} = 0$.

c. Biết nghiệm của phương trình $2x^2 + (2\sqrt{3} + 3)x + 3\sqrt{3} = 0$ là nghiệm của phương trình $4x^4 + bx^2 + c = 0$. Tìm các số $b; c$.

Bài 2. (2,0 điểm)

a. Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = -x^2$.

b. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $A(0; 1)$ và tiếp xúc với (P).

Bài 3. (1,0 điểm)

Cho hai số $a; b$ phân biệt thỏa mãn $a^2 - 2021a = b^2 - 2021b = c$, với c là một số thực dương.

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{2021}{c} = 0$.

Bài 4. (2,0 điểm)

Cho tam giác ABC $(AB < BC)$ nội tiếp trong đường tròn (O) đường kính AC. Gọi I là một điểm thuộc đoạn OC (I khác O và C). Qua I kẻ đường vuông góc với AC cắt BC tại E và AB kéo dài tại D. Gọi K là điểm đối xứng của C qua điểm I.

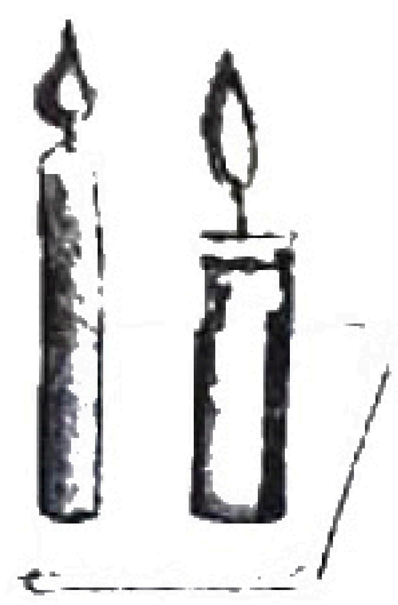
a. Chứng minh rằng các tứ giác $BDCI$ và $AKED$ nội tiếp.

b. Chứng minh $IC.IA = IE.ID$.

Bài 5. (1,0 điểm)

Cho tam giác ABC đều có diện tích 36 cm^2. Gọi M, N, P là ba điểm lần lượt nằm trên ba cạnh AB, BC, CA sao cho $MN \perp BC; NP \perp AC; PM \perp AB$. Chứng tỏ rằng tam giác MNP đều và tính diện tích tam giác MNP.

Bài 6. (1,0 điểm)



Hai ngọn nến hình trụ có chiều cao và đường kính khác nhau được đặt thẳng đứng trên mặt bàn. Ngọn nến thứ nhất cháy hết trong 6 giờ, ngọn nến thứ hai cháy hết trong 8 giờ. Hai ngọn nến được thắp sáng cùng lúc, sau 3 giờ chúng có cùng chiều cao.

a. Tìm tỷ lệ chiều cao ban đầu của hai ngọn nến.

b. Biết tổng chiều cao của hai ngọn nến là 63 cm. Tính chiều cao mỗi ngọn nến.

-------Hết-------

Số báo danh:........................... Phòng thi:........

LƯỢC GIẢI ĐỀ TUYỂN SINH 10 AN GIANG
Môn: TOÁN CHUYÊN

Năm học: 2021 – 2022

Đặng Lê Gia Khánh – Mai Đăng Khoa

Bài 1. (3,0 điểm)

a. Rút gọn $A = \sqrt{419 - 40\sqrt{19}} + \sqrt{419 + 40\sqrt{19}}$.

b. Giải phương trình $2x^2 + (2\sqrt{3} + 3)x + 3\sqrt{3} = 0$.

c. Biết nghiệm của phương trình $2x^2 + (2\sqrt{3} + 3)x + 3\sqrt{3} = 0$ là nghiệm của phương trình $4x^4 + bx^2 + c = 0$. Tìm các số $b; c$.

Lời giải

a) $A = \sqrt{419 - 40\sqrt{19}} + \sqrt{419 + 40\sqrt{19}}$

$= \sqrt{\left(20 - \sqrt{19}\right)^2} + \sqrt{\left(20 + \sqrt{19}\right)^2}$

$= \left|20 - \sqrt{19}\right| + \left|20 + \sqrt{19}\right| = 40$

Vậy $A = 40$.

b) $2x^2 + (2\sqrt{3} + 3)x + 3\sqrt{3} = 0$ (1)

$\Leftrightarrow 2x(x + \sqrt{3}) + 3(x + \sqrt{3}) = 0$

$\Leftrightarrow (2x + 3)(x + \sqrt{3}) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{3}{2} \\ x = -\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt là $\left\{-\dfrac{3}{2}; -\sqrt{3}\right\}$.

c) $4x^4 + bx^2 + c = 0$ (2)

Từ đề bài suy ra $-\dfrac{3}{2}$ và $-\sqrt{3}$ cũng là nghiệm của phương trình (2).

Thay các nghiệm này vào phương trình (2) được hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{81}{4} + \dfrac{9}{4}b + c = 0 \\ 36 + 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{9}{4}b + c = -\dfrac{81}{4} \\ 3b + c = -36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -21 \\ c = 27 \end{cases}$$

Vậy giá trị cần tìm là $b = -21$ và $c = 27$.

Bài 2. (2,0 điểm)

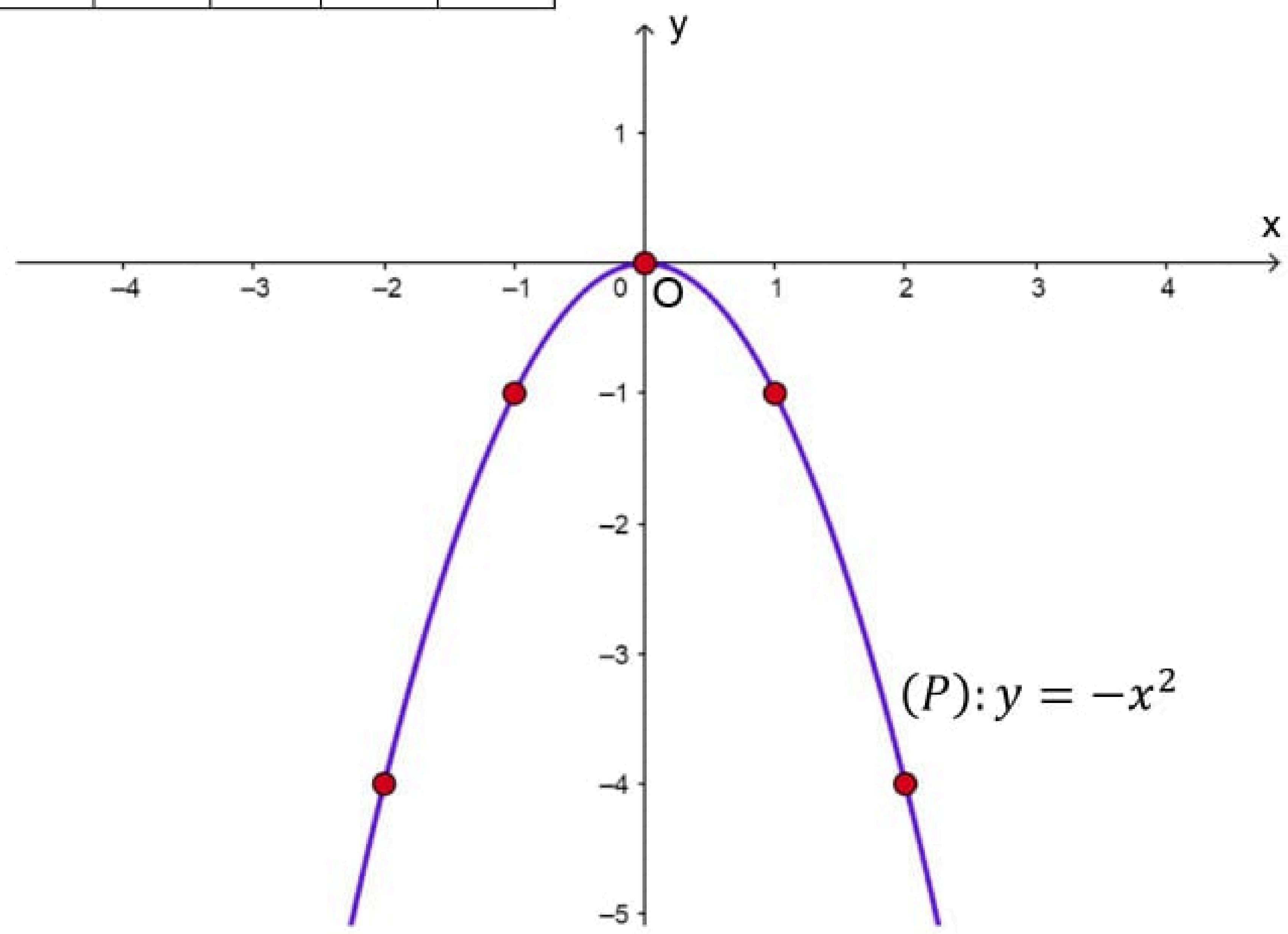
a. Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = -x^2$.

b. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $A(0; 1)$ và tiếp xúc với (P).

Lời giải

a) Bảng giá trị (P):

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	-4	-1	0	-1	-4



b) Gọi phương trình đường thẳng (d) là $y = ax + b$

Vì đường thẳng (d) đi qua điểm $A(0; 1)$ nên thay $x = 0$ và $y = 1$ vào (d) ta được $b = 1$. Vậy phương trình đường thẳng (d) là $(d): y = ax + 1$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d):

$$-x^2 = ax + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + ax + 1 = 0 \ (*)$$

(P) tiếp xúc (d) khi và chỉ khi $(*)$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \ \Delta = a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 2$

Vậy phương trình đường thẳng (d) cần tìm là $y = -2x + 1$ và $y = 2x + 1$.

Bài 3. (1,0 điểm)

Cho hai số $a; b$ phân biệt thỏa mãn $a^2 - 2021a = b^2 - 2021b = c$, với c là một số thực dương.

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{2021}{c} = 0$.

Lời giải

Từ giả thiết $a^2 - 2021a = b^2 - 2021b = c > 0 \ (1)$

$\Rightarrow (a^2 - 2021a) - (b^2 - 2021b) = 0$

$\Leftrightarrow (a - b)(a + b - 2021) = 0$.

Do $a \neq b$ nên $a + b = 2021 \ (*)$.

Lại có từ $(1) \Rightarrow (a^2 - 2021a) + (b^2 - 2021b) = 2c$

$\Leftrightarrow (a^2 + b^2) - 2021(a + b) = 2c \ (2)$

Thay $2021 = a + b$ vào (2) được: $a^2 + b^2 - (a + b)^2 = 2c \Leftrightarrow -ab = c \ (**)$.

Do $c > 0$ suy ra $ab < 0$, tức là a, b trái dấu và không có số nào bằng 0.

Vậy $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2021}{c}=\frac{a+b}{ab}-\frac{2021}{ab}=0$

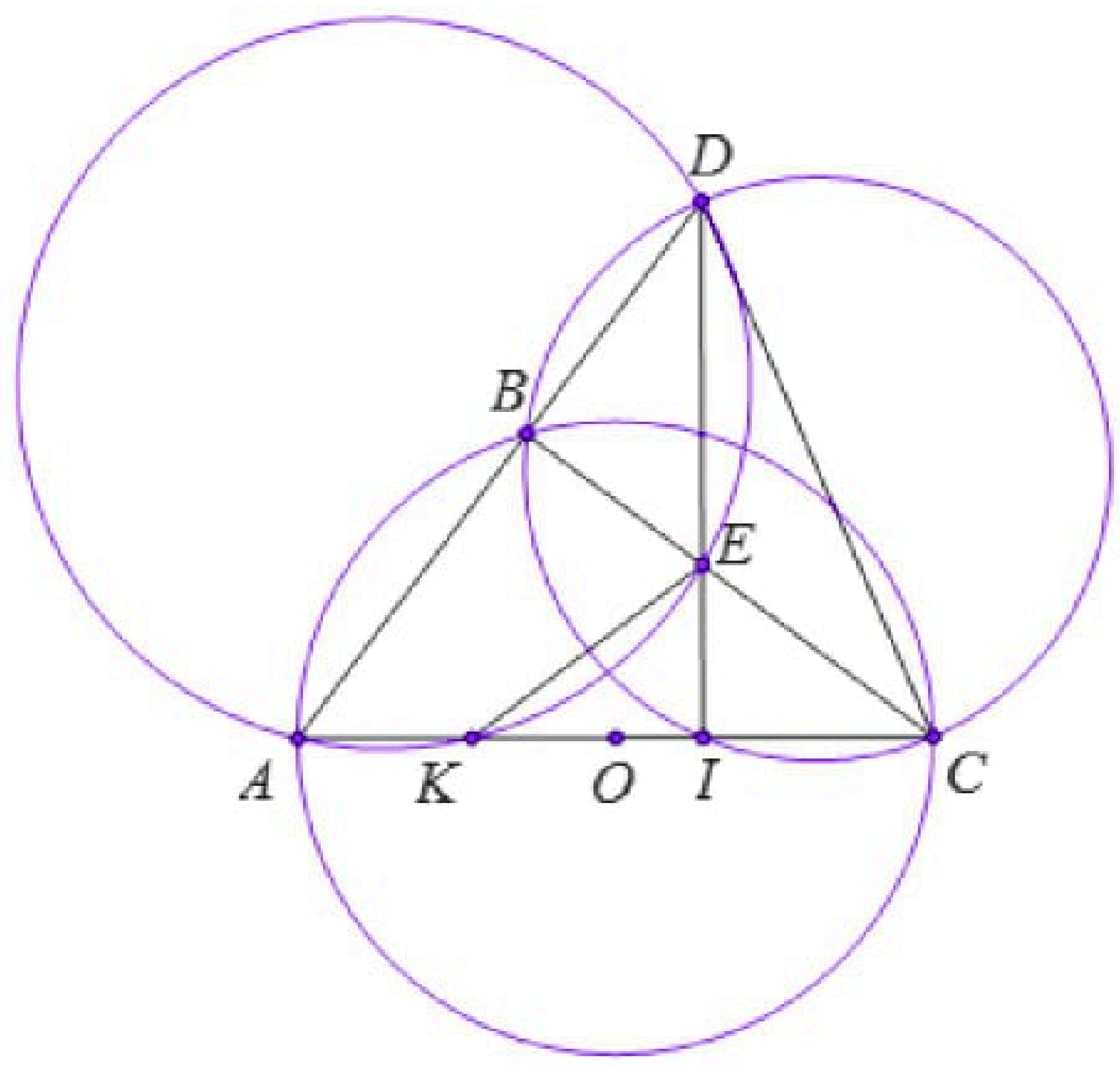
Bài 4. (2,0 điểm)

Cho tam giác ABC $(AB < BC)$ nội tiếp trong đường tròn (O) đường kính AC. Gọi I là một điểm thuộc đoạn OC (I khác O và C). Qua I kẻ đường vuông góc với AC cắt BC tại E và AB kéo dài tại D. Gọi K là điểm đối xứng của C qua điểm I.

a. Chứng minh rằng các tứ giác $BDCI$ và $AKED$ nội tiếp.

b. Chứng minh $IC.IA = IE.ID$.

Lời giải



a) $\widehat{ABC} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AC).

$\Longrightarrow \widehat{DBC} = 180° - \widehat{ABC} = 90°$.

mà $\widehat{DIC} = 90°$ $(DI \perp AC,\ I \in AC)$.

$\Longrightarrow B, I$ cùng nhìn đoạn DC dưới một góc vuông

$\Longrightarrow$ Tứ giác $BDIC$ nội tiếp trong đường tròn đường kính DC.

$\Longrightarrow \widehat{BCI} = \widehat{BDI}$ (góc nội tiếp cùng chắn một cung) hay $\widehat{ECK} = \widehat{ADE}$ (1)

Theo giả thiết, ta có $IK = IC$

$\Longrightarrow EI$ là trung tuyến trong ΔEKC

mà EI là đường cao trong ΔEKC

Do đó ΔEKC cân tại $E \Longrightarrow \widehat{EKC} = \widehat{ECK}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Longrightarrow \widehat{ADE} = \widehat{EKC}$ hay tứ giác $AKED$ nội tiếp.

b) Xét ΔIKE và ΔIDA có:

$\widehat{EIK} = \widehat{AID}$ (góc chung)

$\widehat{EKI} = \widehat{ADI}$ (do tứ giác $AKED$ nội tiếp)

Do đó ΔIKE đồng dạng ΔIDA (G–G)

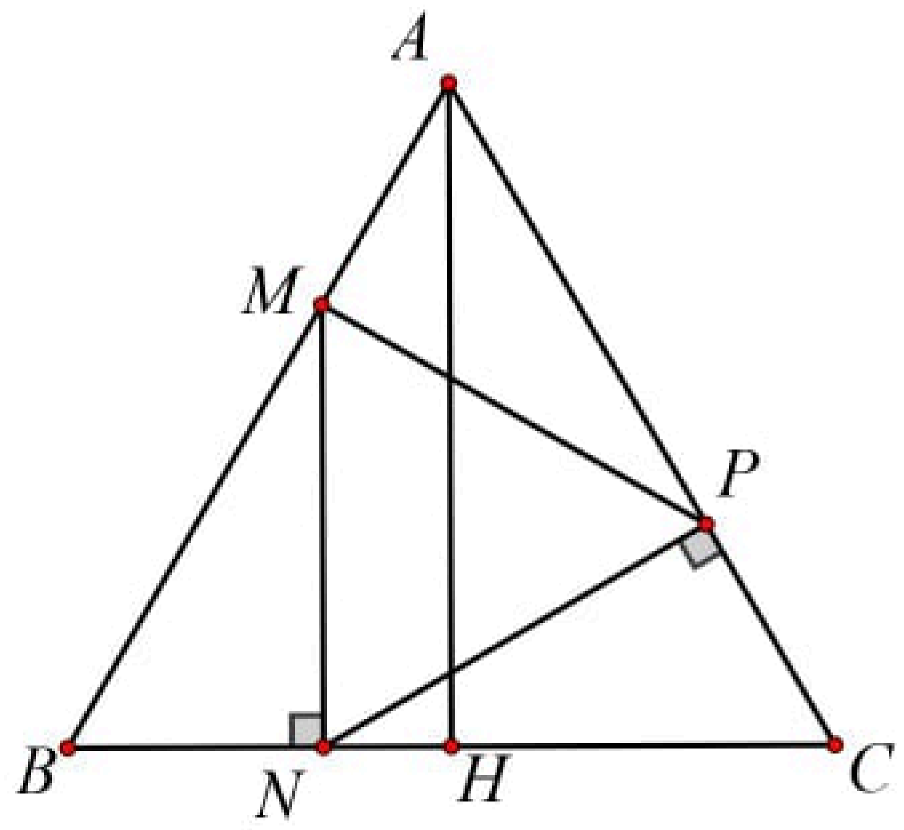
$\Longrightarrow \frac{IK}{ID} = \frac{IE}{IA} \Leftrightarrow IK.IA = IE.ID$

Do $IK = IC$ nên $IC.IA = IE.ID$

Bài 5. (1,0 điểm)

Cho tam giác ABC đều có diện tích 36 cm^2. Gọi M, N, P là ba điểm lần lượt nằm trên ba cạnh AB, BC, CA sao cho $MN \perp BC; NP \perp AC; PM \perp AB$. Chứng tỏ rằng tam giác MNP đều và tính diện tích tam giác MNP.

Lời giải



*** Chứng minh tam giác MNP đều**

$\widehat{MNP} = 180° - \widehat{MNB} - \widehat{PNC}$

$= 180° - \widehat{MNB} - \left(90° - \widehat{PCN}\right) = 60°$

Tương tự: $\widehat{MPN} = 60°$

$\Longrightarrow \widehat{MNP} = \widehat{MPN} = 60°$ hay tam giác ΔMNP đều.

$\Longrightarrow MN = NP = PM = b$ (cm)

*** Tính diện tích tam giác MNP**

Đặt $AB = BC = CA = a$;

ΔNBM vuông tại $N \Longrightarrow NB = MN.\cot MBN = b.\cot 60°$

ΔAMP vuông tại $M \Longrightarrow AM = MP.\cot MAP = b.\cot 60°$

$\Longrightarrow NB = MA = x.$

Dựng AH là đường cao $\Delta ABC \Longrightarrow MN \parallel AH \Longrightarrow \dfrac{BM}{BA} = \dfrac{BN}{BH} \Leftrightarrow \dfrac{a-x}{a} = \dfrac{x}{\frac{a}{2}} \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{3}$

Hay $BM = a - x = \dfrac{2a}{3}$

ΔBMN vuông tại $N \Longrightarrow b = MN = \sqrt{BM^2 - BN^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

ΔMNP và ΔABC là các tam giác đều nên đồng dạng với nhau tỉ số $\dfrac{b}{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Vậy $S_{MNP} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2.S_{ABC} = 12\ (\text{cm}^2)$

Bài 6. (1,0 điểm)

Hai ngọn nến hình trụ có chiều cao và đường kính khác nhau được đặt thẳng đứng trên mặt bàn. Ngọn nến thứ nhất cháy hết trong 6 giờ, ngọn nến thứ hai cháy hết trong 8 giờ. Hai ngọn nến được thắp sáng cùng lúc, sau 3 giờ chúng có cùng chiều cao.

a. Tìm tỷ lệ chiều cao ban đầu của hai ngọn nến.

b. Biết tổng chiều cao của hai ngọn nến là 63 cm. Tính chiều cao mỗi ngọn nến.

Lời giải

a) Sau 3 giờ, chiều cao của hai ngọn nến là

$$l_1' = \left(1 - \frac{3}{6}\right) l_1 = \frac{1}{2} l_1$$
$$l_2' = \left(1 - \frac{3}{8}\right) l_2 = \frac{5}{8} l_2$$

Vì sau 3 giờ cháy, hai ngọn nến có cùng chiều cao nên: $l_1' = l_2' \Leftrightarrow \dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{5}{4}$

b) Tổng chiều cao của hai ngọn nến là 63 cm nên ta có

$$l_1 + l_2 = 63$$
$$\Leftrightarrow \frac{5}{4}l_2 + l_2 = 63$$
$$\Leftrightarrow l_2 = 28\ (\text{cm})$$
$$\Rightarrow l_1 = \frac{5}{4}.28 = 35\ (\text{cm})$$

Vậy ngọn nến thứ nhất cao 35 cm, ngọn nến thứ hai cao 28 cm.

-------Hết------