

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm có 01 trang)

Môn thi: TOÁN (Toán chuyên Tin)

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Khóa thi ngày: 14-16/6/2022

Câu 1. (1,5 điểm)

Cho biểu thức $A = \left(1 + \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1}\right) \left(1 - \frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1}\right)$ với $a \geq 0, a \neq 1$.

Rút gọn A và tìm a sao cho $A^2 + A = 0$.

Câu 2. (1,0 điểm)

Tìm tất cả các số nguyên dương n để $n^4 - 3n^2 + 1$ là số nguyên tố.

Câu 3. (1,0 điểm)

Cho parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x + m$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt sao cho một trong hai giao điểm đó có hoành độ bằng 1.

Câu 4. (2,0 điểm)

- a) Cho phương trình $x^2 - 6x + m = 0$. Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $2x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 < 38$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{x-2y} + 2x + 4y = 5 \\ \frac{x+2y}{x-2y} = 3 \end{cases}.$$

Câu 5. (3,5 điểm)

Cho đường tròn (O) và điểm I nằm ngoài đường tròn đó. Từ điểm I kẻ hai tiếp tuyến IA, IB với đường tròn (O) (A, B là các tiếp điểm).

- a) Chứng minh tứ giác $OAIB$ nội tiếp đường tròn.
b) Qua A kẻ đường thẳng song song với IB cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là C (C khác A). Đường thẳng IC cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là E (E khác C). Đường thẳng AE cắt IB tại K . Chứng minh $KB^2 = AK \cdot KE$.
c) Đường thẳng IC cắt AB tại D . Chứng minh $\frac{IE}{IC} = \frac{DE}{DC}$.

Câu 6. (1,0 điểm)

Chứng minh rằng $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 4 \geq 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$ với mọi số thực x, y khác 0.

----- HẾT -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

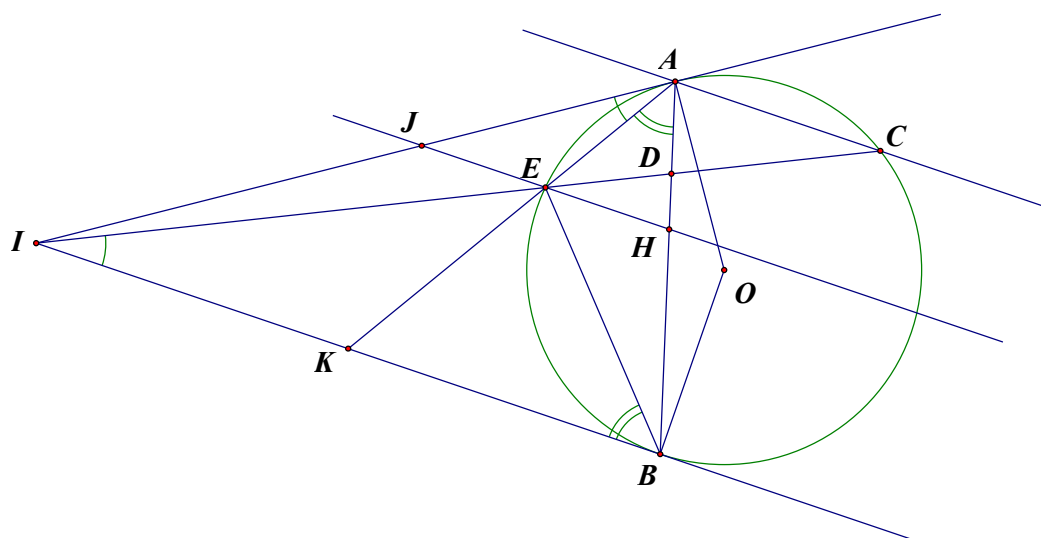
(Bản hướng dẫn này gồm 04 trang)

* **Lưu ý:**

Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong hướng dẫn chấm nhưng đúng thì vẫn cho đủ số điểm từng phần như hướng dẫn quy định.

Câu	Nội Dung	Điểm
Câu 1	Cho biểu thức $A = \left(1 + \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1}\right) \left(1 - \frac{a - \sqrt{a}}{\sqrt{a} - 1}\right)$ với $a \geq 0, a \neq 1$. Rút gọn A và tìm a sao cho $A^2 + A = 0$.	1,5
	$A = \left(1 + \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} + 1)}{\sqrt{a} + 1}\right) \left(1 - \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)}{\sqrt{a} - 1}\right)$	0,25
	$= (1 + \sqrt{a})(1 - \sqrt{a})$	0,25
	Kết quả: $A = 1 - a$ với $a \geq 0; a \neq 1$	0,25
	$A^2 + A = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ A = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - a = 0 \\ 1 - a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases}$	0,25 + 0,25
	Đối chiếu điều kiện, chọn $a = 2$	0,25
Câu 2	Tìm tất cả các số nguyên dương n để $n^4 - 3n^2 + 1$ là số nguyên tố.	1,0
	$B = n^4 - 3n^2 + 1 = (n^2 - 1)^2 - n^2 = (n^2 + n - 1)(n^2 - n - 1)$.	0,25
	Với $n = 1$, ta có $B = -1$ không phải là số nguyên tố.	0,25
	Với $n = 2$, ta có $B = 5$ là số nguyên tố.	0,25
	Với $n > 2$, mỗi thừa số của B đều lớn hơn 1 nên B là hợp số. Vậy $n = 2$ thỏa đề.	0,25
Câu 3	Cho parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x + m$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt sao cho một trong hai giao điểm đó có hoành độ bằng 1.	1,0
	Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là $x^2 + 2x + m = 0$	0,25
	(P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 1 - m > 0 \Leftrightarrow m < 1$.	0,25
	Gọi A là giao điểm có hoành độ bằng 1, $A \in (P)$ nên $A(1; -1)$	0,25
	$A \in (d) \Rightarrow -1 = 2 + m \Leftrightarrow m = -3$ (thỏa mãn). Vậy $m = -3$.	0,25
Câu 4	a) Cho phương trình $x^2 - 6x + m = 0$. Tìm tất cả các giá trị nguyên của	1,0

(2,0)	tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $2x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 < 38$.	
	$\Delta' = 9 - m$,	0,25
	phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2 \Leftrightarrow 9 - m > 0 \Leftrightarrow m < 9$.	0,25
	$2x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 < 38 \Leftrightarrow 2(x_1 + x_2)^2 - 5x_1x_2 < 38 \Leftrightarrow 2.6^2 - 5m < 38 \Leftrightarrow m > \frac{34}{5}$.	0,25
	Vậy $\frac{34}{5} < m < 9 \Rightarrow m \in \{7; 8\}$ do m là số nguyên.	0,25
	b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{1}{x-2y} + 2x + 4y = 5 \\ \frac{x+2y}{x-2y} = 3 \end{cases}$.	1,0
	Điều kiện $x \neq 2y$. Đặt $u = \frac{1}{x-2y}$; $v = x + 2y$. Ta có hệ phương trình $\begin{cases} u + 2v = 5 \\ uv = 3 \end{cases}$	0,25
	Giải tìm được $(u = 3; v = 1)$ hoặc $(u = 2; v = \frac{3}{2})$.	0,25
	- Với $(u = 3; v = 1)$, ta có $\begin{cases} x - 2y = \frac{1}{3} \\ x + 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{6} \end{cases}$	0,25
Câu 5	- Với $(u = 2; v = \frac{3}{2})$, ta có $\begin{cases} x - 2y = \frac{1}{2} \\ x + 2y = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$	0,25
	Đổi chiều điều kiện, hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm $\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{6} \end{cases}; \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$ • Nếu thiếu điều kiện $x \neq 2y$ thì trừ 0,25 đ	
	Cho đường tròn (O) và điểm I nằm ngoài đường tròn đó. Từ điểm I kẻ hai tiếp tuyến IA, IB với đường tròn (O) (A, B là các tiếp điểm). a) Chứng minh tứ giác $OAIB$ nội tiếp đường tròn. b) Qua A kẻ đường thẳng song song với IB cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là C (C khác A). Đường thẳng IC cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là E (E khác C). Đường thẳng AE cắt IB tại K. Chứng minh $KB^2 = AK \cdot KE$. c) Đường thẳng IC cắt AB tại D. Chứng minh $\frac{IE}{IC} = \frac{DE}{DC}$.	3.5



5a	a) Chứng minh tứ giác $OAIB$ nội tiếp đường tròn	1,0
	Hình vẽ phục vụ câu a)	0,25
	$\widehat{IAO} = 90^0$ (tính chất tiếp tuyến)	0,25
	$\widehat{IBO} = 90^0$ (tính chất tiếp tuyến)	0,25
	Suy ra $\widehat{IAO} + \widehat{IBO} = 180^0$ nên tứ giác $OAIB$ nội tiếp đường tròn.	0,25
5b	b) Qua A kẻ đường thẳng song song với IB cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là C (C khác A). Đường thẳng IC cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là E (E khác C). Đường thẳng AE cắt IB tại K. Chứng minh $KB^2 = AK.KE$.	1,5
	Hình vẽ phục vụ câu b)	0,25
	Xét hai tam giác AKB và BKE , có $\widehat{KAB} = \widehat{KBE}$ (cùng bằng nửa số đo của cung EB),	0,25
	góc K chung	0,25
	nên chúng đồng dạng	0,25
	suy ra $\frac{AK}{BK} = \frac{KB}{KE}$.	0,25
	$\Leftrightarrow KB^2 = AK.KE$	0,25
5c	c) Đường thẳng IC cắt AB tại D. Chứng minh $\frac{IE}{IC} = \frac{DE}{DC}$.	1,0
	Xét hai tam giác AKI và IKE , có $\widehat{KAI} = \widehat{KIE}$ (cùng bằng góc ECA), góc K chung nên chúng đồng dạng, suy ra $\frac{AK}{IK} = \frac{IK}{KE} \Leftrightarrow IK^2 = AK.KE$. Từ đó suy ra $IK = KB$ (1)	0,25

	Qua E kẻ đường thẳng song song với IB , cắt AB tại H và cắt IA tại J , theo định lí Ta-lét ta có $\frac{JE}{IK} = \frac{EH}{KB}$ (2).	0,25
	Từ (1) và (2) suy ra $JE = EH \Leftrightarrow \frac{JE}{AC} = \frac{EH}{AC}$.	0,25
	Theo định lí Ta-lét $\frac{IE}{IC} = \frac{JE}{AC}$ và $\frac{DE}{DC} = \frac{EH}{AC}$. Vậy $\frac{IE}{IC} = \frac{DE}{DC}$.	0,25
Câu 6	Chứng minh rằng $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 4 \geq 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$ với mọi số thực $x; y$ khác 0.	1,0
	Cách 1: $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 4 \geq 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) \Leftrightarrow \frac{x^4 + y^4 + 4x^2y^2}{x^2y^2} \geq \frac{3(x^2 + y^2)}{xy}$ $\Leftrightarrow x^4 + y^4 + 4x^2y^2 \geq 3xy(x^2 + y^2)$ (do $x^2y^2 > 0$)	0,25
	$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2)xy + 2x^2y^2 - 2xy(x^2 + y^2) \geq 0$	0,25
	$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - xy) - 2xy(x^2 + y^2 - xy) \geq 0$ $\Leftrightarrow (x^2 + y^2 - xy)(x^2 + y^2 - 2xy) \geq 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \left[\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4}\right](x - y)^2 \geq 0$ (*)	0,25
	Bất đẳng thức (*) luôn đúng với mọi số thực $x; y$ khác 0. Vậy bất đẳng thức đã cho luôn đúng với mọi số thực $x; y$ khác 0.	
	Cách 2: Đặt $t = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$. Ta có $t^2 = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 2$ Theo Cô-si $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \geq 2 \Rightarrow t^2 \geq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 2 \\ t \leq -2 \end{cases}$	0,25
	Bất đẳng thức đã cho trở thành $t^2 - 3t + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t + 2) \geq 0$ (*)	0,25
	Với $t \geq 2$, (*) luôn đúng nên bất đẳng thức đã cho luôn đúng	0,25
	Với $t \leq -2$, (*) luôn đúng nên bất đẳng thức đã cho luôn đúng	0,25
