

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi gồm có 01 trang)

ĐỀ THI TUYỂN SINH
VÀO TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN NĂM 2022
Môn thi: TOÁN

(Dùng riêng cho thí sinh thi vào lớp chuyên Toán và chuyên Tin)

Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian phát đề)

Bài 1. (2,0 điểm)

a) Không sử dụng máy tính, hãy tìm giá trị của biểu thức $P = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$.

b) Cho đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Chứng minh rằng nếu $P(x)$ nhận giá trị nguyên với mỗi số nguyên x thì ba số $2a, a+b, c$ đều là những số nguyên. Sau đó, chứng tỏ rằng nếu ba số $2a, a+b, c$ là những số nguyên thì $P(x)$ cũng nhận giá trị nguyên với mỗi số nguyên x .

Bài 2. (3,0 điểm)

Cho tam giác đều ABC ngoại tiếp đường tròn (O) . Cung nhỏ $\widehat{OB}$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC cắt đường tròn (O) tại điểm E . Tia BE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F .

a) Chứng minh tia EO là tia phân giác của góc CEF .

b) Chứng minh tứ giác $ABOF$ nội tiếp.

c) Gọi D là giao điểm thứ hai của CE với đường tròn (O) . Chứng minh ba điểm A, F, D thẳng hàng.

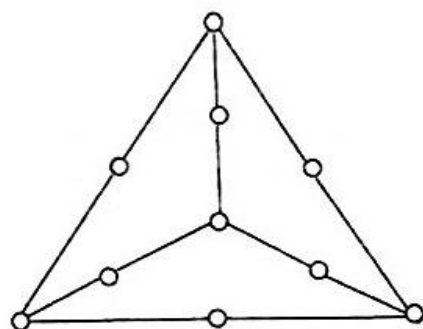
Bài 3. (2,0 điểm)

Cho a, b, c, d là các số nguyên dương sao cho $a.b = c.d$. Chứng minh rằng số

$$N = a^{2022} + b^{2022} + c^{2022} + d^{2022} \text{ là hợp số.}$$

Bài 4. (2,0 điểm)

Ta viết mười số $0, 1, 2, \dots, 9$ vào mười ô tròn trong hình bên, mỗi số được viết đúng một lần. Sau đó, ta tính tổng ba số trên mỗi một đoạn thẳng để nhận được 6 tổng. Có hay không một cách viết mười số như thế sao cho 6 tổng nhận được là bằng nhau?



Bài 5. (1,0 điểm)

a) Trong mặt phẳng cho 5 điểm sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một tam giác tù có các đỉnh được lấy từ 5 điểm đã cho.

b) Trong mặt phẳng cho 2022 điểm sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 2018 tam giác tù mà mỗi tam giác tù đó có các đỉnh được lấy từ 2022 điểm đã cho.

Giải chi tiết đề thi Toán chuyên trường THPT chuyên Sư Phạm

Nguyễn Duy Khương - Nguyễn Văn Hoàng - Nguyễn Khang - Nguyễn Hoàng Việt

1 Câu 1

- a) Không sử dụng máy tính, hãy tìm giá trị biểu thức $P = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$
- b) Cho đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Chứng minh rằng nếu $P(x)$ nhận giá trị nguyên với mỗi số nguyên x thì ba số $2a, a+b, c$ đều là những số nguyên. Sau đó chứng tỏ nếu ba số $2a, a+b, c$ là những số nguyên thì $P(x)$ cũng nhận giá trị nguyên với mỗi số nguyên x .

Lời giải.

- a) Ta có:

$$P^3 = 7 + 5\sqrt{2} + 7 - \sqrt{2} + 3(7 + 5\sqrt{2})(7 - 5\sqrt{2}).P$$

$$\Leftrightarrow P^3 = 14 - 3P$$

$$\Leftrightarrow (P - 2)(P^2 + 2P + 7) = 0$$

$$\text{Mà } P^2 + 2P + 7 = (P + 1)^2 + 6 \geq 6 > 0$$

$$\Rightarrow P = 2$$

$$\text{Vậy } P = 2$$

- b) * Chiều thuận:

$$\text{Ta tính: } P(0) = c \in \mathbb{Z}; P(1) = a + b + c \in \mathbb{Z}; P(-1) = a - b + c \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow a + b, a - b \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow (a + b) + (a - b) = 2a \in \mathbb{Z}$$

* Chiều đảo :

$$\text{Ta biến đổi: } P(x) = a(x^2 - x) + (a + b)x + c$$

Xét với $x \in \mathbb{Z}$:

$$\text{Ta có: } x^2 - x : 2, \text{ mà } 2a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a(x^2 - x) \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Lại có: } a + b, c \in \mathbb{Z}$$

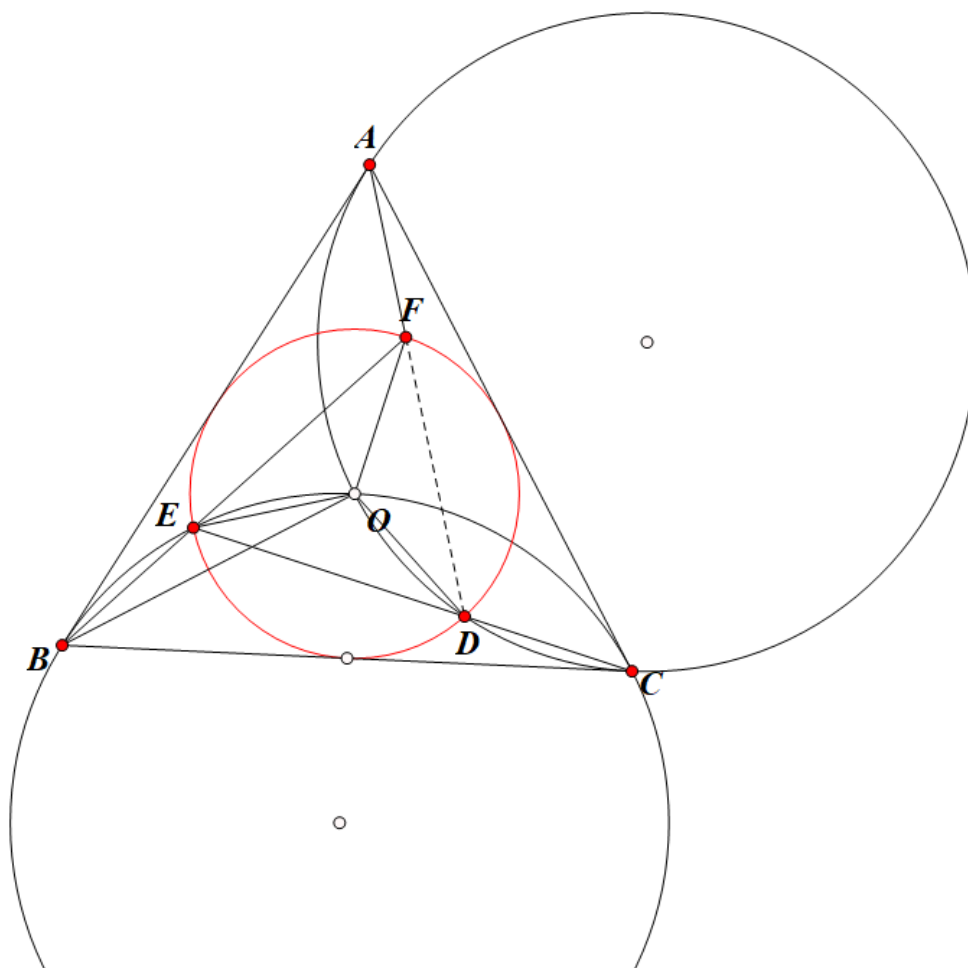
Suy ra $P(x) \in \mathbb{Z}$ với mọi $x \in \mathbb{Z}$.

2 Câu 2

Cho tam giác ABC đều ngoại tiếp (O) . Cung nhỏ OB của đường tròn ngoại tiếp tam giác (OBC) cắt đường tròn (O) tại E . Tia BE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là F .

- Chứng minh rằng: EO là tia phân giác góc CEF .
- Chứng minh rằng: $ABOF$ là tứ giác nội tiếp.
- Gọi D là giao điểm thứ hai của CE và đường tròn (O) . Chứng minh rằng A, F, D thẳng hàng.

Lời giải.



- Ta có: $\widehat{BEC} = \widehat{BOC} = 120^\circ$ do $BEOC$ nội tiếp. Ta có: $\widehat{FEC} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$
Ta lại có: $\widehat{OEC} = \widehat{OBC} = 30^\circ$ dẫn đến: OE là phân giác góc FEC .
- $\widehat{OFE} = \widehat{OFB} = \widehat{OEF} = \widehat{OCB} = 30^\circ = \widehat{OAB}$. Do đó: $ABOF$ là tứ giác nội tiếp.

c) Chứng minh tương tự ý b) ta có: $AODC$ là tứ giác nội tiếp. Do đó: $\widehat{ODF} = \widehat{OCA} = 30^\circ$ dẫn đến tam giác EFD đều. Suy ra: $\widehat{EFD} + \widehat{AFB} = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$ suy ra: A, F, D thẳng hàng.

3 Câu 3

Cho a, b, c, d là các số nguyên dương sao cho $ab = cd$. Chứng minh rằng số

$$N = a^{2022} + b^{2022} + c^{2022} + d^{2022}$$

là hợp số.

Lời giải. Ta chứng minh bài toán tổng quát với cùng điều kiện,

$$N = a^k + b^k + c^k + d^k$$

là hợp số với mọi số nguyên dương k .

Thật vậy, đặt $m = \gcd(a, c)$ thì tồn tại $a_1, c_1 \in \mathbb{Z}^+$ sao cho $a = ma_1, c = mc_1$ với $(a_1, c_1) = 1$. Ta có $ab = cd \Rightarrow a_1b = c_1d$.

Suy ra $a_1b : c_1$ mà $(a_1, c_1) = 1 \Rightarrow b : c_1$, làm tương tự suy ra $d : a_1$.

Vậy ta có thể tiếp tục đặt $b = c_1b_1, d = d_1a_1$ với b_1, d_1 là các số nguyên dương.

Trở lại đẳng thức $a_1b = c_1d \Leftrightarrow a_1c_1b_1 = c_1d_1a_1 \Rightarrow b_1 = d_1 = s$.

Do đó:

$$\begin{aligned} N &= a^k + c^k + b^k + d^k \\ &= (ma_1)^k + (mc_1)^k + (c_1b_1)^k + (d_1a_1)^k \\ &= m^k(a_1^k + c_1^k) + s^k(c_1^k + a_1^k) \\ &= (m^k + s^k)(a_1^k + c_1^k). \end{aligned}$$

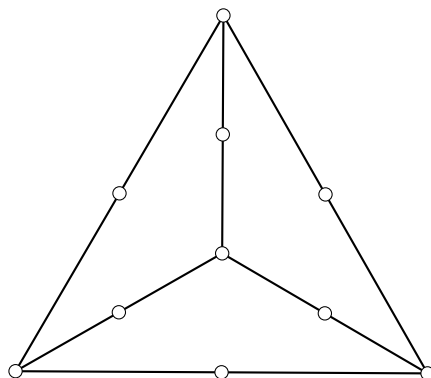
Mặt khác chú ý rằng m, s, a_1, c_1 đều là các số nguyên dương từ đó N luôn là hợp số với mọi $k \in \mathbb{Z}^+$. (đpcm) □

4 Câu 4

Ta viết 10 số $0, 1, \dots, 9$ vào mười ô tròn trong hình bên, mỗi số được viết đúng 1 lần. Sau đó, ta tính tổng ba số trên mỗi đoạn thẳng để nhận được 6 tổng.

Có hay không một cách viết 10 số như thế sao cho 6 tổng nhận được là bằng nhau.

Lời giải.



Giả sử 6 tổng này bằng nhau, kí hiệu các điểm như hình bên dưới.

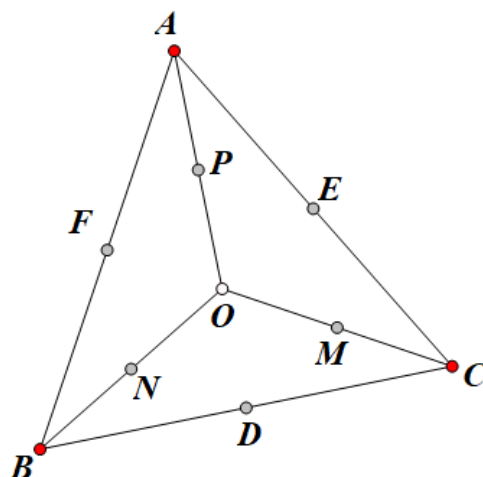
- Tổng các số trên đoạn OA là $A + P + O$.
- Tổng các số trên đoạn OB là $O + B + N$.
- Tổng các số trên đoạn OC là $O + M + C$
- Tổng các số trên đoạn AC là $A + E + C$.
- Tổng các số trên đoạn BC là $B + D + C$.
- Tổng các số trên đoạn AB là $A + F + B$.

Dẫn đến tổng các số trên 6 đoạn là $S = 3(A + B + C) + D + E + F + M + N + P$ và số này chia hết cho 6 do chúng là bằng nhau. Do đó:

Ta có

$$S \equiv A + B + C + D + E + F + M + N + P \pmod{2}$$

mà S chia hết cho 2 nên tổng các số trên cũng chia hết cho 2 dẫn đến vô lý do tổng của chúng là 45 không chia hết cho 2. Vậy không tồn tại cách điền.

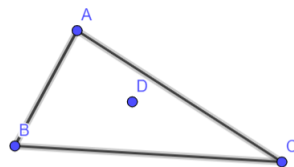


5 Câu 5

- Trong mặt phẳng cho 5 điểm sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một tam giác tù có ít nhất 3 đỉnh được lấy từ 5 điểm đã cho.
- Trong mặt phẳng cho 2022 điểm sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 2018 tam giác tù mà mỗi tam giác tù đó được lấy từ 2022 điểm đã cho.

Lời giải.

- Trước hết, ta thấy rằng nếu tồn tại 4 điểm bất kì mà có một điểm nằm trong tam giác được tạo bởi 3 điểm còn lại, ví dụ như hình sau



thì trong ba tam giác ABD , ACD , BCD sẽ có một góc lớn hơn 90° . Do đó, ta suy ra 5 điểm đề bài cho phải tạo thành một ngũ giác lồi. Lúc này thì một trong số 5 tam giác có hai cạnh bên liền kề nhau sẽ là tam giác tù.

- Ta sẽ chứng minh quy nạp kết quả này. Giả sử với n điểm thì tồn tại ít nhất $n - 4$ tam giác tù. Ta sẽ chứng minh với $n + 1$ điểm thì sẽ tạo thành

$n - 3$ tam giác tù.

Bây giờ, cho trước $n + 1$ điểm. Xét n điểm bất kì trong $n + 1$ điểm đó thì chỉ có $n - 4$ tam giác tù được tạo thành. Xét một điểm X không thuộc n điểm đó. Bây giờ, ta xét tập hợp các tam giác được tạo thành từ điểm X với 2 trong số n điểm đã cho, gọi là $\mathcal{X}$.

- Nếu $\mathcal{X}$ chứa một tam giác tù thì kết hợp với $n - 4$ tam giác tù được tạo thành từ n điểm trước, ta suy ra điều phải chứng minh.
- Nếu $\mathcal{X}$ không chứa tam giác tù nào thì bằng cách chứng minh tương tự với n điểm bất kì khác, ta suy ra mọi tam giác được tạo thành từ các điểm trong 2022 điểm này đều là tam giác nhọn, hiển nhiên vô lý với giả thiết quy nạp.

Bài toán được chứng minh.