

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Cho biểu thức $A = \left(\frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} - \frac{a\sqrt{a}+1}{a+\sqrt{a}} \right) : \left(\frac{a+2}{a-2} \right)$ với $a > 0$; $a \neq 1$; $a \neq 2$. Tìm tất cả các giá trị

nguyên dương của a để P nhận giá trị nguyên.

b) Cho $x = 1 + \sqrt{2021}$. Tính giá trị biểu thức: $x^5 - 2x^4 - 2021x^3 + 3x^2 + 2018x - 2021$.

Câu 2. (2,5 điểm)

1) Một người dự định đi xe đạp từ A đến B cách nhau 40km trong một thời gian nhất định. Sau khi đi được 20km người đó đã dừng lại nghỉ 20 phút. Do đó để đến B đúng thời gian dự định người đó phải tăng vận tốc thêm 3km/h. Tính vận tốc dự định của người đó.

2) Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 2m - 5 = 0$ (trong đó m là tham số).

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có 2 nghiệm x_1 ; x_2 với mọi m.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có 2 nghiệm x_1 ; x_2 thỏa mãn điều kiện:

$$(x_1^2 - 2mx_1 + 2m - 1)(x_2^2 - 2mx_2 + 2m - 1) < 0.$$

Câu 3. (3,5 điểm)

Cho tam giác nhọn $\triangle ABC$ không cân ($AB < AC$) có đường tròn ngoại tiếp (O; R) và đường tròn nội tiếp (I; r). Đường tròn (I; r) tiếp xúc với các cạnh BC , CA , AB lần lượt tại D, E, F. Kéo dài AI cắt BC tại M và cắt đường tròn (O;R) tại điểm thứ 2 là N (N khác A). Gọi Q là giao điểm của AI và FE. Nối AD cắt đường tròn (I; r) tại điểm thứ 2 là P (P khác D). Kéo dài DQ cắt đường tròn (I; r) tại điểm thứ 2 là T (T khác D). Chứng minh rằng:

a) $AF^2 = AP \cdot AD$

b) Tứ giác PQID nội tiếp và $NB^2 = NM \cdot NA$.

c) QA là phân giác của $\widehat{PQT}$

d) $\widehat{ADF} = \widehat{QDE}$

Câu 4. (2,0 điểm)

a) Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn: $x + y \leq \frac{2}{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = 53x + 53y + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$.

b) Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 \geq 3$. Chứng minh rằng:

$$(x^4 + y^4 + z^4) + (x^3 + y^3 + z^3) \geq 3 + x + y + z.$$

Câu 5. (1,0 điểm)

a) Tìm tất cả các bộ số nguyên $(x ; y)$ thỏa mãn phương trình: $x^2 - 2x + 2y^2 = 2(xy + 1)$

b) Cho p là số nguyên tố sao cho tồn tại các số nguyên dương $x ; y$ thỏa mãn $x^3 + y^3 - p = 6xy - 8$.
Tìm giá trị lớn nhất của p .

----- **HẾT** -----

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN – LÀO CAI (2021-2022)

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Cho biểu thức $A = \left(\frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} - \frac{a\sqrt{a}+1}{a+\sqrt{a}} \right) : \left(\frac{a+2}{a-2} \right)$ với $a > 0$; $a \neq 1$; $a \neq 2$. Tìm tất cả các giá trị nguyên dương của a để P nhận giá trị nguyên.

b) Cho $x = 1 + \sqrt{2021}$. Tính giá trị biểu thức: $x^5 - 2x^4 - 2021x^3 + 3x^2 + 2018x - 2021$.

Lời giải:

a) Với: $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq \{1, 2\} \end{cases}$

$$\text{Ta có: } A = \left(\frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} - \frac{a\sqrt{a}+1}{a+\sqrt{a}} \right) : \left(\frac{a+2}{a-2} \right) = \left(\frac{(\sqrt{a}-1)(a+\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} - \frac{(\sqrt{a}+1)(a-\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)} \right) : \left(\frac{a+2}{a-2} \right)$$

$$A = \left(\frac{a+\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} - \frac{a-\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} \right) : \left(\frac{a+2}{a-2} \right) = 2 \cdot \left(\frac{a-2}{a+2} \right) = \frac{2a-4}{a+2} = 2 - \frac{8}{a+2}$$

$$\text{Để } A \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2 - \frac{8}{a+2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow a+2 \in U(8) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8\}$$

$$\text{Do: } \begin{cases} a \in \mathbb{Z}^+ \\ a \neq \{1; 2\} \end{cases} \Rightarrow a+2 \geq 5 \Rightarrow a+2 \in \{8\} \Rightarrow a=6 \text{ (TM)}$$

$$\text{Vậy } a=6 \Rightarrow A \in \mathbb{Z}$$

b)

$$\text{Đặt: } M = x^5 - 2x^4 - 2021x^3 + 3x^2 + 2018x - 2021 = x^5 - 2x^4 - 2020x^3 - x^3 + 2x^2 + 2020x + x^2 - 2x - 2020 - 1.$$

$$M = x^3(x^2 - 2x - 2020) - x(x^2 - 2x - 2020) + (x^2 - 2x - 2020) - 1 = (x^2 - 2x - 2020)(x^3 - x + 1) - 1$$

$$\text{Mà: } x = 1 + \sqrt{2021} \Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{2021} \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2021 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2020 = 0.$$

$$\Rightarrow M = -1$$

Câu 2. (2,5 điểm)

1) Một người dự định đi xe đạp từ A đến B cách nhau 40km trong một thời gian nhất định. Sau khi đi được 20km người đó đã dừng lại nghỉ 20 phút. Do đó để đến B đúng thời gian dự định người đó phải tăng vận tốc thêm 3km/h. Tính vận tốc dự định của người đó.

2) Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 2m - 5 = 0$ (trong đó m là tham số).

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có 2 nghiệm $x_1; x_2$ với mọi m .

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có 2 nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện:

$$(x_1^2 - 2mx_1 + 2m - 1)(x_2^2 - 2mx_2 + 2m - 1) < 0.$$

Lời giải:

1) Gọi vận tốc dự định của xe đạp là: x (km/h); $x > 0$.

Vận tốc sau khi tăng tốc là: $x + 3$ (km/h).

Thời gian dự định là: $\frac{40}{x}$ (h).

Quãng đường từ lúc tăng tốc là: $40 - 20 = 20$ (km).

Thời gian lúc chưa tăng tốc là: $\frac{20}{x}$ (h).

Thời gian từ lúc tăng tốc là: $\frac{20}{x+3}$ (h).

Theo đề bài ta có: $\frac{20}{x} + \frac{1}{3} + \frac{20}{x+3} = \frac{40}{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \text{ (TM)} \\ x = -15 \text{ (KTM)} \end{cases}$

Vậy vận tốc dự định của xe đạp là: 12 (km/h)

2) a) Ta có: $\Delta' = [-(m-1)]^2 - 2m + 5 = m^2 - 4m + 6 = (m-2)^2 + 2 > 0 \forall m$

=> Phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m.

b) Theo Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1 x_2 = 2m-5 \end{cases}$

Do: $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình nên ta có:

$$\begin{cases} x_1^2 - 2(m-1)x_1 + 2m - 5 = 0 \\ x_2^2 - 2(m-1)x_2 + 2m - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 - 2mx_1 + 2x_1 + 2m - 1 - 4 = 0 \\ x_2^2 - 2mx_2 + 2x_2 + 2m - 1 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 - 2mx_1 + 2m - 1 = 4 - 2x_1 \\ x_2^2 - 2mx_2 + 2m - 1 = 4 - 2x_2 \end{cases}$$

Mà: $(x_1^2 - 2mx_1 + 2m - 1)(x_2^2 - 2mx_2 + 2m - 1) < 0 \Leftrightarrow (4 - 2x_1)(4 - 2x_2) < 0 \Leftrightarrow 16 - 8(x_1 + x_2) + 4x_1x_2 < 0$

$$\Leftrightarrow 16 - 8 \cdot 2(m-1) + 4(2m-5) < 0 \Leftrightarrow 12 - 8m < 0 \Leftrightarrow m < \frac{3}{2}$$

Câu 3. (1,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ΔABC không cân ($AB < AC$) có đường tròn ngoại tiếp (O; R) và đường tròn nội tiếp (I; r). Đường tròn (I; r) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Kéo dài AI cắt BC tại M và cắt đường tròn (O; R) tại điểm thứ 2 là N (N khác A). Gọi Q là giao điểm của AI và FE. Nối AD cắt đường tròn (I; r) tại điểm thứ 2 là P (P khác D). Kéo dài DQ cắt đường tròn (I; r) tại điểm thứ 2 là T (T khác D). Chứng minh rằng:

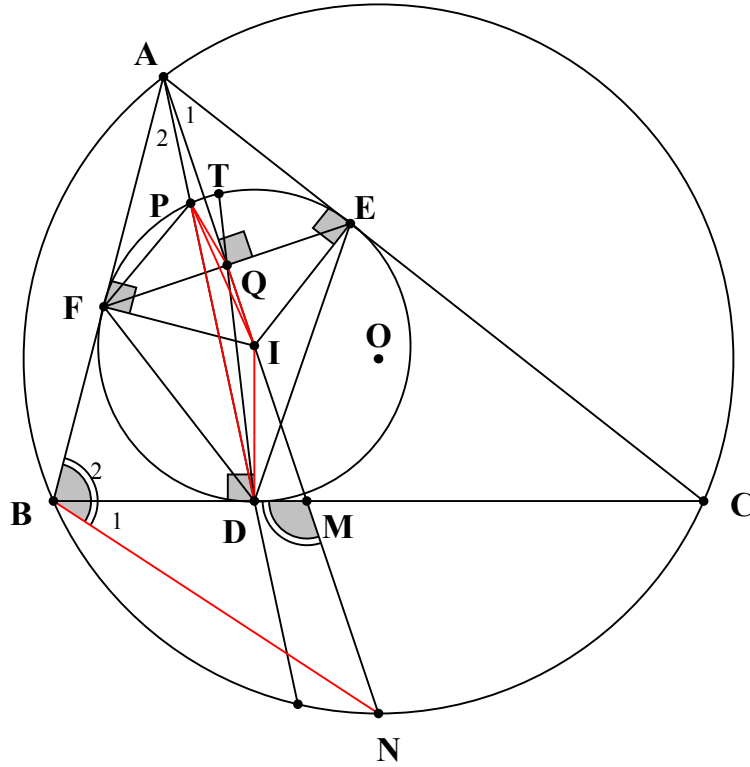
a) $AF^2 = AP.AD$

b) Tứ giác PQID nội tiếp và $NB^2 = NM.NA$.

c) QA là phân giác của $\widehat{PQT}$

d) $\widehat{ADF} = \widehat{QDE}$

Lời giải:



a) Xét $\triangle AFP$ và $\triangle ADF$ có: $\widehat{AFP} = \widehat{ADF} = \frac{1}{2}\widehat{FP}$; $\widehat{A}$ Chung

$\Rightarrow \triangle AFP \sim \triangle ADF (g.g) \Rightarrow \frac{AF}{AD} = \frac{AP}{AF} \Rightarrow AF^2 = AP.AD$ (đpcm)

b) Vì: AF và AE là 2 tiếp tuyến của $(I) \Rightarrow AI$ là trung trực của FE $\Rightarrow AI \perp FE$ tại Q.

$\Rightarrow AF^2 = AQ.AI$ (hệ thức lượng) $\Rightarrow AQ.AI = AP.AD (= AF^2) \Rightarrow \frac{AP}{AQ} = \frac{AI}{AD}$

Xét $\triangle APQ$ và $\triangle AID$ có: $\frac{AP}{AQ} = \frac{AI}{AD}$ (cmt); $\widehat{A}$ Chung

$\Rightarrow \triangle APQ \sim \triangle AID (c.g.c) \Rightarrow \widehat{AQP} = \widehat{ADI} \Rightarrow PQID$ nội tiếp (vì: $\widehat{AQP}$ là góc ngoài tại đỉnh Q)

Ta có: $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (vì: AI là tia phân giác) $\Rightarrow \widehat{NB} = \widehat{NC} \Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{A_2}$

Xét $\triangle ABN$ và $\triangle BMN$ có: $\widehat{B_1} = \widehat{A_2}$ (cmt); $\widehat{N}$ Chung

$$\Rightarrow \triangle ABN \sim \triangle BMN \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AN}{BN} = \frac{BN}{MN} \Rightarrow NB^2 = NA.NM \text{ (đpcm)}$$

$$\text{c) Ta có: } \begin{cases} \widehat{IPD} = \widehat{IDP} \text{ (IP = ID = r)} \\ \widehat{IPD} = \widehat{IQD} \left(= \frac{1}{2} \widehat{ID} \right) \end{cases} \Rightarrow \widehat{IDP} = \widehat{IQD}$$

$$\text{Mà: } \begin{cases} \widehat{IDP} = \widehat{AQP} \text{ (cmt)} \\ \widehat{AQT} = \widehat{IQD} \text{ (đối đỉnh)} \end{cases} \Rightarrow \widehat{AQP} = \widehat{AQT} \Rightarrow \text{đpcm}$$

d) Gọi K là giao điểm của AI với $(I) \Rightarrow \widehat{FK} = \widehat{EK}$

$$\text{Mà: } \widehat{AQP} = \widehat{AQT} \text{ (cmt)} \Rightarrow \widehat{KP} = \widehat{KT} \Rightarrow \widehat{FP} = \widehat{ET} \Rightarrow \widehat{FDP} = \widehat{EDT} \Rightarrow \text{đpcm}$$

Câu 4. (2,0 điểm)

a) Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn: $x + y \leq \frac{2}{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = 53x + 53y + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$.

b) Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 \geq 3$. Chứng minh rằng:

$$(x^4 + y^4 + z^4) + (x^3 + y^3 + z^3) \geq 3 + x + y + z.$$

Lời giải:

$$\text{a) Dự đoán điểm rơi: } x = y = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{x^2} + ax + ax \stackrel{\text{Co-Si}}{\geq} 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x^2} \cdot ax \cdot ax} = 3 \cdot \sqrt[3]{a^2} \Rightarrow \frac{1}{x^2} = ax \Rightarrow a = 27$$

$$\text{Ta có: } A = 53x + 53y + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \left(27x + 27x + \frac{1}{x^2} \right) + \left(27y + 27y + \frac{1}{y^2} \right) - (x + y)$$

$$\Rightarrow A \stackrel{\text{Co-Si}}{\geq} 3 \cdot \sqrt[3]{27x \cdot 27x \cdot \frac{1}{x^2}} + 3 \cdot \sqrt[3]{27y \cdot 27y \cdot \frac{1}{y^2}} - (x + y) = 27 + 27 - (x + y) \geq 54 - \frac{2}{3} = \frac{160}{3}$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = y = \frac{1}{3}$

$$\text{Vậy } \Rightarrow \min A = \frac{160}{3} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{3}$$

$$\text{b) Ta có: } x^4 + 1 \geq 2 \cdot \sqrt{x^4 \cdot 1} = 2x^2; y^4 + 1 \geq 2 \cdot \sqrt{y^4 \cdot 1} = 2y^2; z^4 + 1 \geq 2 \cdot \sqrt{z^4 \cdot 1} = 2z^2$$

$$\Rightarrow x^4 + y^4 + z^4 \geq 2(x^2 + y^2 + z^2) - 3 \Rightarrow VT \geq 2(x^2 + y^2 + z^2) - 3 + x^3 + y^3 + z^3$$

$$\text{Tương tự: } x^3 + x \geq 2 \cdot \sqrt{x^3 \cdot x} = 2x^2; y^3 + y \geq 2 \cdot \sqrt{y^3 \cdot y} = 2y^2; z^3 + z \geq 2 \cdot \sqrt{z^3 \cdot z} = 2z^2$$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 \geq 2(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z) \Rightarrow VT \geq 2(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z) + 2(x^2 + y^2 + z^2) - 3$$

$$\Rightarrow VT \geq (x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z) + 3(x^2 + y^2 + z^2) - 3 \geq (x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z) + 3.3 - 3$$

$$\Rightarrow VT \geq (x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z) + 6$$

$$\text{Mà: } x^2 + 1 \geq 2\sqrt{x^2 \cdot 1} = 2x; y^2 + 1 \geq 2\sqrt{y^2 \cdot 1} = 2y; z^2 + 1 \geq 2\sqrt{z^2 \cdot 1} = 2z$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq 2(x + y + z) - 3 \Rightarrow VT \geq 2(x + y + z) - 3 - (x + y + z) + 6 = (x + y + z) + 3 \text{ (đpcm)}$$

Câu 5. (1,0 điểm)

a) Tìm tất cả các bộ số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình: $x^2 - 2x + 2y^2 = 2(xy + 1)$

b) Cho p là số nguyên tố sao cho tồn tại các số nguyên dương $x; y$ thỏa mãn $x^3 + y^3 - p = 6xy - 8$.
Tìm giá trị lớn nhất của p .

Lời giải:

$$\text{a) Ta có: } x^2 - 2x + 2y^2 = 2(xy + 1) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2y^2 = 2xy + 2 \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2x = 2$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 - 2x + y^2 - 2y + 1 + 2y = 3 \Leftrightarrow (x - y)^2 - 2(x - y) + (y - 1)^2 = 3 \Leftrightarrow (x - y)^2 - 2(x - y) + 1 + (y - 1)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow (x - y - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4 (= 0^2 + 2^2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ y - 1 = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ y - 1 = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} y - 1 = 0 \\ x - y - 1 = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} y - 1 = 0 \\ x - y - 1 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

Vậy $(x; y) = (4; 3); (0; -1); (0; 1); (4; 1)$.

$$\text{b) Ta có: } x^3 + y^3 - p = 6xy - 8 \Leftrightarrow p = x^3 + y^3 - 6xy + 8 \Leftrightarrow p = (x + y)^3 - 3xy(x + y) - 6xy + 8$$

$$\Leftrightarrow p = [(x + y)^3 + 8] - 3xy(x + y + 2) \Leftrightarrow p = (x + y + 2)[(x + y)^2 - 2(x + y) + 4 - 3xy]$$

$$\text{Do } p \text{ là số nguyên tố nên: } \begin{cases} (x + y + 2) = 1 \\ (x + y)^2 - 2(x + y) + 4 - 3xy = 1 \end{cases} \Rightarrow (x + y)^2 - 2(x + y) + 4 - 3xy = 1$$

(Vì: $x; y \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow x + y + 2 \geq 4$)

$$\Rightarrow (x + y)^2 - 2(x + y) + 4 - 3xy = 1 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y - 3xy = -3 \Leftrightarrow x^2 - xy + y^2 - 2x - 2y = -3$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4xy + 4y^2 - 8x - 8y = -12 \Leftrightarrow (2x - y)^2 + 3y^2 - 4(2x - y) + 4 - 12y + 12 = 4$$

$$\Leftrightarrow (2x - y - 2)^2 + 3(y - 2)^2 = 4(=1^2 + 3.1^2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - 2 = 1 \\ y - 2 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x - y - 2 = 1 \\ y - 2 = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x - y - 2 = -1 \\ y - 2 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x - y - 2 = -1 \\ y - 2 = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow p = 8 \text{ (KTM)}$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow p = 5 \text{ (TM)}$$

$$\text{TH3: } \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow p = 7 \text{ (TM)}$$

$$\text{TH4: } \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow p = 4 \text{ (KTM)}$$

Vì: p là số nguyên tố lớn nhất $\Rightarrow p = 7$

Vậy $p = 7$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.