

Họ và tên thí sinh:Số báo danh:

Câu 1: (2,0 điểm)

a) Xác định tọa độ giao điểm của Parabol $(P): y = 3x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x + 8$.

b) Cho $A = \frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2021}+\sqrt{2023}}$.

$$B = \sqrt{\frac{2023 - 2\sqrt{2022}}{4}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{5} - \sqrt{6 + \sqrt{20}}}$$

Không sử dụng máy tính cầm tay chứng tỏ $A > B$.

Câu 2: (2,0 điểm)

a) Tìm một đa thức bậc ba $P(x)$ với hệ số nguyên nhận $x = \frac{2 + \sqrt[3]{4}}{3}$ là một nghiệm và $P(1) = -6$.

b) Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^2y^2 - 2x^2y + 3x^2 + 4xy - 4x + 2y^2 - 4y - 1 = 0$.

Câu 3: (2,0 điểm)

a) Giải phương trình: $\sqrt{x + 4\sqrt{x-3} + 1} + \sqrt{x - 4\sqrt{x-3} + 1} = x - 11$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 8xy - x - 14y + 4 = 0 \\ 8x^2y^2 + 7xy - 20y^2 + 2 = 0. \end{cases}$$

Câu 4: (3,0 điểm)

Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) , kẻ ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H , lấy điểm M trên cung nhỏ BC ($M \neq B, C$). Gọi P là điểm đối xứng với M qua AB .

a) Chứng minh: $\widehat{APB} = \widehat{ACB}$ và tứ giác $AHBP$ nội tiếp một đường tròn.

b) Chứng minh H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác FDE .

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{AD}{HD} + \frac{BE}{HE} + \frac{CF}{HF}$.

Câu 5: (1,0 điểm)

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$. Chứng minh rằng

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz \geq 1.$$

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi có 01 trang)

Môn thi: TOÁN (Chuyên)
Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Họ và tên thí sinh:; SBD.....

Câu 1: (2,0 điểm)

a) Xác định tọa độ giao điểm của parabol $(P): y = 3x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x + 8$.

b) Cho $A = \frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2021}+\sqrt{2023}}$

và $B = \sqrt{\frac{2023-2\sqrt{2022}}{4}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{5}-\sqrt{6+\sqrt{20}}}$.

Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy chứng tỏ $A > B$.

Câu 2: (2,0 điểm)

a) Tìm một đa thức bậc ba $P(x)$ với hệ số nguyên nhận $x = \frac{2+\sqrt[3]{4}}{3}$ là một nghiệm và $P(1) = -6$.

b) Tìm nghiệm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn:

$$x^2y^2 - 2x^2y + 3x^2 + 4xy - 4x + 2y^2 - 4y - 1 = 0.$$

Câu 3: (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $\sqrt{x+4\sqrt{x-3}}+1+\sqrt{x-4\sqrt{x-3}}+1=x-11$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 8xy - x - 14y + 4 = 0 \\ 8x^2y^2 + 7xy - 20y^2 + 2 = 0 \end{cases}$$

Câu 4: (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , kẻ ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H , lấy điểm M trên cung nhỏ BC ($M \neq B, C$). Gọi P là điểm đối xứng với M qua AB .

a) Chứng minh: $\widehat{APB} = \widehat{ACB}$ và tứ giác $AHBP$ nội tiếp một đường tròn.

b) Chứng minh: H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác FDE .

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{AD}{HD} + \frac{BE}{HE} + \frac{CF}{HF}$.

Câu 5: (1,0 điểm)

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$. Chứng minh rằng

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz \geq 1.$$

-----**HẾT**-----

Chữ ký giám thị 1 Chữ ký giám thị 2

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1: (2,0 điểm)

a) Xác định tọa độ giao điểm của parabol $(P): y = 3x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x + 8$.

b) Cho $A = \frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2021}+\sqrt{2023}}$

và $B = \sqrt{\frac{2023-2\sqrt{2022}}{4}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{5}-\sqrt{6+\sqrt{20}}}$.

Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy chứng tỏ $A > B$.

Lời giải

a) Phương trình hoành độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng (d) là

$$3x^2 = 2x + 8 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 8 = 0 \quad (*).$$

Ta có: $\Delta' = (-1)^2 - 3 \cdot (-8) = 25 > 0$.

Suy ra $(*)$ có hai nghiệm phân biệt: $x = \frac{-(-1) + \sqrt{25}}{3} = 2$ và $x = \frac{-(-1) - \sqrt{25}}{3} = -\frac{4}{3}$.

Với $x = 2$ thì thay vào phương trình của (P) ta được $y = 12$.

Với $x = -\frac{4}{3}$ thì thay vào phương trình của (P) ta được $y = \frac{16}{3}$.

Vậy tọa độ các giao điểm của parabol (P) và đường thẳng (d) là $(2; 12)$ và $\left(-\frac{4}{3}; \frac{16}{3}\right)$.

b) Ta có: $\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}} = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})} = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Do đó, $A = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{1}}{2} + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{2} + \dots + \frac{\sqrt{2023} - \sqrt{2021}}{2} = \frac{\sqrt{2023} - 1}{2}$.

Mặt khác, $B = \sqrt{\frac{2022 - 2\sqrt{2022} + 1}{4}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{5} - \sqrt{5 + 2\sqrt{5} + 1}}$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2022} - 1}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{5} - \sqrt{(\sqrt{5} + 1)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2022} - 1}{2} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{5} - (\sqrt{5} + 1)}$$

$$= \frac{\sqrt{2022} - 1}{2}.$$

Vì $\sqrt{2023} > \sqrt{2022}$ nên ta có $\frac{\sqrt{2023} - 1}{2} > \frac{\sqrt{2022} - 1}{2}$ hay $A > B$.

Câu 2: (2,0 điểm)

a) Tìm một đa thức bậc ba $P(x)$ với hệ số nguyên nhận $x = \frac{2 + \sqrt[3]{4}}{3}$ là một nghiệm và $P(1) = -6$.

b) Tìm nghiệm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn:

$$x^2y^2 - 2x^2y + 3x^2 + 4xy - 4x + 2y^2 - 4y - 1 = 0.$$

Lời giải

a) Ta có $x = \frac{2 + \sqrt[3]{4}}{3} \Leftrightarrow 3x - 2 = \sqrt[3]{4} \Leftrightarrow (3x - 2)^3 = 4 \Leftrightarrow 27x^3 - 18x^2 + 12x - 12 = 0$.

Suy ra đa thức bậc ba $P(x)$ thỏa đề có dạng $P(x) = k(27x^3 - 18x^2 + 12x - 12)$ với k là hằng số.

Vì $P(1) = -6$ nên $-3k = -6 \Leftrightarrow k = 2$.

Vậy có đa thức cần tìm là $P(x) = 54x^3 - 36x^2 + 24x - 24$.

b) Tìm nghiệm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn:

$$x^2y^2 - 2x^2y + 3x^2 + 4xy - 4x + 2y^2 - 4y - 1 = 0.$$

Ta có $x^2y^2 - 2x^2y + 3x^2 + 4xy - 4x + 2y^2 - 4y - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (x^2y^2 - 2x^2y + x^2) + (2x^2 + 4xy + 2y^2) - 4x - 4y - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (xy - x)^2 + 2(x + y)^2 - 4(x + y) + 2 = 3$$

$$\Leftrightarrow (xy - x)^2 + 2(x + y - 1)^2 = 3$$

Vì x, y là các số nguyên nên $(xy - x)^2$ và $(x + y - 1)^2$ là các số tự nhiên.

$$\text{Do đó, } (xy - x)^2 + 2(x + y - 1)^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} (xy - x)^2 = 1 \\ (x + y - 1)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [x(y - 1)]^2 = 1 \\ x^2 + (y - 1)^2 + 2x(y - 1) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(y - 1) = 1 \\ x^2 + (y - 1)^2 = -1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x(y - 1) = -1 \\ x^2 + (y - 1)^2 = 3 \end{cases}.$$

Cả hai trường hợp đều không thỏa mãn.

Vậy không tồn tại các số nguyên x, y thỏa mãn đề bài.

Câu 3: (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $\sqrt{x + 4\sqrt{x - 3} + 1} + \sqrt{x - 4\sqrt{x - 3} + 1} = x - 11$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 8xy - x - 14y + 4 = 0 \\ 8x^2y^2 + 7xy - 20y^2 + 2 = 0 \end{cases}$.

Lời giải

a) Điều kiện: $x \geq 3$.

Với điều kiện đó, ta có $\sqrt{x + 4\sqrt{x - 3} + 1} + \sqrt{x - 4\sqrt{x - 3} + 1} = x - 11$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-3+4\sqrt{x-3}+4} + \sqrt{x-3-4\sqrt{x-3}+4} = x-11$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-3}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-3}-2)^2} = x-11$$

$$\Leftrightarrow |\sqrt{x-3}+2| + |\sqrt{x-3}-2| = x-11$$

Nếu $x < 11$ thì $x-11 < 0$, không thỏa mãn phương trình.

Nếu $x \geq 11$ thì $\sqrt{x-3}-2 > 0$, ta có

$$|\sqrt{x-3}+2| + |\sqrt{x-3}-2| = x-11$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-3} = x-11$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 26x + 133 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \text{ (ktm)} \\ x = 19 \text{ (tm)} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 19$.

b) Ta có
$$\begin{cases} 8xy - x - 14y + 4 = 0 \\ 8x^2y^2 + 7xy - 20y^2 + 2 = 0 \end{cases}$$

Nếu $y = 0$ thì không thỏa mãn hệ.

Nếu $y \neq 0$ thì hệ tương đương với
$$\begin{cases} 8x - \frac{x}{y} - 14 + \frac{4}{y} = 0 \\ 8x^2 + 7\frac{x}{y} - 20 + \frac{2}{y^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\left(2x + \frac{1}{y}\right) - \frac{x}{y} - 14 = 0 \quad (1) \\ 2\left(2x + \frac{1}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} - 20 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Trừ (2) cho (1) theo vế ta được
$$2\left(2x + \frac{1}{y}\right)^2 - 4\left(2x + \frac{1}{y}\right) - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{1}{y} = -1 \\ 2x + \frac{1}{y} = 3 \end{cases}$$

TH1: $2x + \frac{1}{y} = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{y} = -2x - 1$.

Thay vào (1), ta có $-4 - x(-2x - 1) - 14 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 18 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{145}}{2}$.

TH1: $2x + \frac{1}{y} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{y} = -2x + 3$.

Thay vào (1), ta có $12 - x(-2x + 3) - 14 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm:

$$\left(\frac{-1-\sqrt{145}}{2}; \frac{\sqrt{145}}{145}\right), \left(\frac{-1+\sqrt{145}}{2}; -\frac{\sqrt{145}}{145}\right), (2; -1), \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right).$$

Câu 4: (3,0 điểm)

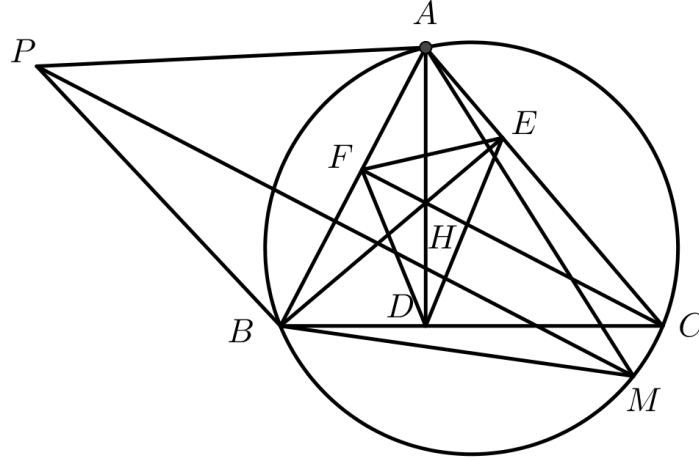
Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) , kẻ ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H , lấy điểm M trên cung nhỏ BC ($M \neq B, C$). Gọi P là điểm đối xứng với M qua AB .

a) Chứng minh: $\widehat{APB} = \widehat{ACB}$ và tứ giác $AHBP$ nội tiếp một đường tròn.

b) Chứng minh: H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác FDE .

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{AD}{HD} + \frac{BE}{HE} + \frac{CF}{HF}$.

Lời giải



a) P đối xứng với M qua AB nên $\widehat{APB} = \widehat{APM} + \widehat{MPB} = \widehat{AMP} + \widehat{PMB} = \widehat{AMB}$ (1).

Do $\widehat{AMB}$ và $\widehat{ACB}$ là các góc nội tiếp cùng chắn cung AB nên $\widehat{AMB} = \widehat{ACB}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{APB} = \widehat{ACB}$ (3).

Tứ giác $DHEC$ có $\widehat{HDC} = \widehat{HEC} = 90^\circ$ (vì AD, BE là các đường cao của ΔABC) nên $\widehat{ECD} + \widehat{EHD} = 180^\circ$. Suy ra $\widehat{ACB} + \widehat{AHB} = 180^\circ$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{APB} + \widehat{AHB} = 180^\circ$. Do đó, tứ giác $AHBP$ nội tiếp một đường tròn.

b) Dễ thấy, $HFAE$, $AEDB$, $DBFH$ là các tứ giác nội tiếp nên $\widehat{HFE} = \widehat{HAE} = \widehat{HBD} = \widehat{HFD}$. Suy ra HF là đường phân giác của tam giác FDE .

Tương tự, HD cũng là đường phân giác của tam giác FDE .

Vậy H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác FDE .

c) Đặt $S_{HBC} = x, S_{HCA} = y, S_{HAB} = z$. Ta có: $\frac{AD}{HD} = \frac{\frac{1}{2}AD \cdot BC}{\frac{1}{2}HD \cdot BC} = \frac{S_{ABC}}{S_{HBC}} = \frac{x+y+z}{x}$.

Tương tự, ta cũng có: $\frac{BE}{HE} = \frac{x+y+z}{y}$; $\frac{CF}{HF} = \frac{x+y+z}{z}$.

Suy ra $T = \frac{x+y+z}{x} + \frac{x+y+z}{y} + \frac{x+y+z}{z} = 3 + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right)$.

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} = 2; \quad \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 2\sqrt{\frac{y}{z} \cdot \frac{z}{y}} = 2; \quad \frac{z}{x} + \frac{x}{z} \geq 2\sqrt{\frac{z}{x} \cdot \frac{x}{z}} = 2.$$

Suy ra $T \geq 9$.

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{y}{x} \\ \frac{y}{z} = \frac{z}{y} \\ \frac{z}{x} = \frac{x}{z} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow \begin{cases} AD = 3HD \\ BE = 3HE \\ CF = 3HF \end{cases} \Leftrightarrow H \text{ là trọng tâm tam}$$

giác ABC .

Mà H cũng là trực tâm của tam giác ABC nên lúc đó ABC là tam giác đều.

Câu 5: (1,0 điểm)

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$. Chứng minh rằng

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz \geq 1.$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có: $x^2 + y^2 \geq 2xy$; $y^2 + z^2 \geq 2yz$; $z^2 + x^2 \geq 2zx$.

Suy ra $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$.

Ta có: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3 \Leftrightarrow xy + yz + zx = 3xyz$.

Do đó, $x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz \geq xyz$ (1).

Dễ dàng chứng minh bất đẳng thức AM - GM cho ba số không âm a, b, c :

$$a + b + c \geq \sqrt[3]{abc}.$$

Áp dụng bất đẳng thức này, ta có $3 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{z}} \Leftrightarrow xyz \geq 1$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz \geq 1$.

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$.