

Câu 1. (1,0 điểm) Cho ba biểu thức $M = \frac{x\sqrt{x}-8}{3+(\sqrt{x}+1)^2}$, $N = \frac{(\sqrt{x}+1)^3 - (\sqrt{x}-1)^3}{(x-4)(3x+1)}$ và $P = \frac{\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$.

- a) Tìm tất cả các số thực x thỏa mãn $M = x - 4$.
b) Trong trường hợp các biểu thức M , N và P xác định, rút gọn biểu thức $Q = MN + P$.

Câu 2. (3,0 điểm)

a) Giải phương trình $(x^4 + 4x^2 - 5) \left(\frac{x-3+\sqrt{3+x}}{\sqrt{x}-1} \right) = 0$.

b) Cho hai số thực m, n thỏa mãn hai đường thẳng $(d): y = mx + m$ và $(d_1): y = x + 3m + 2n - mn$ cắt nhau tại điểm $I(3;9)$. Tính giá trị của mn và $\frac{m}{n}$.

c) Cho hình chữ nhật $ABCD$ có chu vi bằng 28 (cm) và nội tiếp đường tròn (C) có bán kính $R = 5$ (cm). Tính diện tích hình chữ nhật $ABCD$.

Câu 3. (2,0 điểm) Gọi (P) , (d) lần lượt là các đồ thị của hàm số $y = x^2$ và $y = 2mx + 3$.

- a) Chứng minh rằng đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ với mọi số thực m . Tính $y_1 + y_2$ theo m .
b) Tìm tất cả các số thực m sao cho $y_1 - 4y_2 = x_1 - 4x_2 + 3x_1x_2$.

Câu 4. (1,0 điểm) Một kho hàng nhập gạo (trong kho chưa có gạo) trong 4 ngày liên tiếp và mỗi ngày (kể từ ngày thứ hai) đều nhập một lượng gạo bằng 120% lượng gạo đã nhập vào kho trong ngày trước đó. Sau đó, từ ngày thứ năm kho ngừng nhập và mỗi ngày kho lại xuất một lượng gạo bằng $\frac{1}{10}$ lượng gạo kho ở ngày trước đó.

Hãy tính lượng gạo kho hàng nhập ngày thứ nhất trong mỗi trường hợp sau:

- a) Ngày thứ ba, sau khi nhập xong thì trong kho có 91 tấn gạo.
b) Tổng số gạo đã xuất trong các ngày thứ năm và thứ sáu là 50,996 tấn gạo.

Câu 5. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (T) có tâm O , có $AB = AC$ và $\widehat{BAC} > 90^\circ$. Gọi M là trung điểm của đoạn AC . Tia MO cắt đường tròn (T) tại điểm D . Đường thẳng BC lần lượt cắt các đường thẳng AO và AD tại các điểm N , P .

- a) Chứng minh rằng tứ giác $OCMN$ nội tiếp và $\widehat{BDC} = 4\widehat{ODC}$.
b) Tia phân giác của $\widehat{BDP}$ cắt đường thẳng BC tại điểm E . Đường thẳng ME cắt đường thẳng AB tại điểm F . Chứng minh rằng $CA = CP$ và $ME \perp DB$.
c) Chứng minh rằng tam giác MNE cân. Tính tỉ số $\frac{DE}{DF}$.

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1.

a) Điều kiện xác định của M : $x \geq 0$. Với điều kiện này, ta có:

$$M = \frac{(\sqrt{x})^3 - 8}{x + 2\sqrt{x} + 4} = \frac{(\sqrt{x} - 2)(x + 2\sqrt{x} + 4)}{x + 2\sqrt{x} + 4} = \sqrt{x} - 2.$$

Do đó phương trình $M = x - 4$ tương đương:

$$\sqrt{x} - 2 = x - 4 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 1) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ thỏa } x \geq 0.$$

Vậy $x = 4$ là giá trị duy nhất cần tìm.

b) Điều kiện để ba biểu thức M , N , P cùng xác định là $x \geq 0$ và $x \neq 4$.

$$\text{Ta có: } N = \frac{(\sqrt{x} + 1)^3 - (\sqrt{x} - 1)^3}{(x - 4)(3x + 1)} = \frac{2(3x + 1)}{(x - 4)(3x + 1)} = \frac{2}{x - 4} = \frac{2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}.$$

$$\text{Do đó, ta có: } Q = (\sqrt{x} - 2) \cdot \frac{2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} = \frac{2}{\sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} = 1.$$

Vậy $Q = 1$.

Câu 2.

a) Điều kiện: $x \geq 0$ và $x \neq 1$. Phương trình tương đương $x^4 + 4x^2 - 5 = 0$ (1) hoặc $\sqrt{x+3} = 3-x$.

Ta có: (1) $\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 + 5) = 0$. Do $x \geq 0$ và $x \neq 1$ nên phương trình này vô nghiệm.

$$\text{Lại có (2) } \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = 3-x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x+3 = (3-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ (x-1)(x-6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \text{ Nhưng } x \geq 0 \text{ và } x \neq 1 \text{ nên}$$

phương trình này vô nghiệm.

Tóm lại phương trình đã cho vô nghiệm.

b) Điều kiện để (d) và (d₁) cắt nhau là $m \neq 1$. Ta lại có I thuộc (d) và (d₁), nên ta có hệ:

$$\begin{cases} 4m = 9 \\ 3m + 2n - mn = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{9}{4} \\ n = 3 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } mn = \frac{27}{4} \text{ và } \frac{m}{n} = \frac{3}{4}.$$

c) Độ dài đường chéo AC bằng đường kính của đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$ nên $AC = 10$ (cm).

Đặt $AB = a$ (cm) và $BC = b$ (cm) với $a, b > 0$. Khi đó diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là ab (cm²).

Theo giả thiết ta có: $2(a+b) = 28 \Rightarrow a+b = 14$.

Lại có $a^2 + b^2 = AC^2 = 100$.

$$\text{Suy ra: } ab = \frac{(a+b)^2 - (a^2 + b^2)}{2} = \frac{14^2 - 100}{2} = 48.$$

Vậy diện tích hình chữ nhật $ABCD$ bằng 48 (cm²).

Câu 3.

a) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $x^2 - 2mx - 3 = 0$.

Ta thấy $ac = 1 \cdot (-3) = -3 < 0$ nên phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ trái dấu nhau.

Do đó (P) luôn cắt (d) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ với mọi m .

Áp dụng định lý Viète, ta có: $x_1 + x_2 = 2m$ và $x_1 x_2 = -3$.

Do đó $y_1 + y_2 = (2mx_1 + 3) + (2mx_2 + 3) = 2m(x_1 + x_2) + 6 = 4m^2 + 6$.

Vậy $y_1 + y_2 = 4m^2 + 6$.

b) Ta có: $y_1 = x_1^2$ và $y_2 = x_2^2$ nên phương trình tương đương:

$$\begin{aligned} x_1^2 - 4x_2^2 &= x_1 - 4x_2 + 3x_1x_2 \Leftrightarrow x_1^2 - 3x_1x_2 - 4x_2^2 = x_1 - 4x_2 \\ &\Leftrightarrow (x_1 + x_2)(x_1 - 4x_2) = x_1 - 4x_2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2 - 1)(x_1 - 4x_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 = 4x_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Nếu $x_1 = 4x_2$ thì $x_1 x_2 = 4x_2^2 = -3$ vô lý.

Nếu $x_1 + x_2 = 1$ thì $2m = 1$ hay $m = \frac{1}{2}$.

Vậy $m = \frac{1}{2}$ là giá trị duy nhất cần tìm.

Câu 4.

Gọi x (tấn) là lượng gạo nhập vào kho trong ngày thứ nhất với $x > 0$. Khi đó lượng gạo nhập vào kho trong các ngày thứ hai, thứ ba, thứ tư lần lượt là $120\%x = \frac{6}{5}x$, $120\%\left(\frac{6}{5}x\right) = \frac{36}{25}x$ và $120\%\left(\frac{36}{25}x\right) = \frac{216}{125}x$.

a) Tổng lượng gạo đã nhập vào kho sau ngày thứ ba là $x + \frac{6}{5}x + \frac{36}{25}x = \frac{91}{25}x$ (tấn).

Theo giả thiết ta có: $\frac{91}{25}x = 91 \Leftrightarrow x = 25$.

Vậy ngày thứ nhất kho hàng đã nhập 25 tấn gạo.

b) Sau ngày thứ tư, tổng lượng gạo đã nhập vào kho là $x + \frac{6}{5}x + \frac{36}{25}x + \frac{216}{125}x = \frac{671}{125}x$ (tấn).

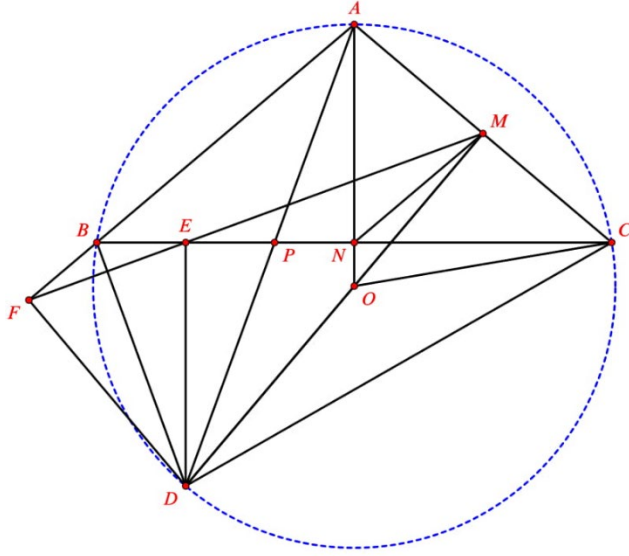
Do đó, lượng gạo trong kho đã xuất trong các ngày thứ năm và thứ sáu lần lượt là $\frac{1}{10}\left(\frac{671}{125}x\right)$ tấn và

$\frac{1}{10}\left[\frac{9}{10}\left(\frac{671}{125}x\right)\right] = \frac{9}{100}\left(\frac{671}{125}x\right)$ tấn. Theo giả thiết ta có:

$$\frac{1}{10}\left(\frac{671}{125}x\right) + \frac{9}{100}\left(\frac{671}{125}x\right) = 50,996 \Leftrightarrow x = 50.$$

Vậy ngày thứ nhất kho hàng đã nhập 50 tấn gạo.

Câu 5.



a) Do M là trung điểm của AC nên $OM \perp AC \Rightarrow \widehat{OMC} = 90^\circ$.

Lại có $AB = AC$ và $OB = OC$ nên AO là trung trực của $BC \Rightarrow AO \perp BC \Rightarrow \widehat{ONC} = 90^\circ$.

Từ đó suy ra tứ giác $OCMN$ nội tiếp.

Ta có: $AB = AC$ nên $\widehat{AB} = \widehat{AC}$ suy ra DA là tia phân giác của $\widehat{BDC}$ nên $\widehat{BDC} = 2\widehat{ADC}$ (1).

Mặt khác OM là trung trực của AC và $D \in OM$ nên DM là trung trực của AC .

Suy ra DM là phân giác của $\widehat{ADC} \Rightarrow \widehat{ADC} = 2\widehat{ODC}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BDC} = 4\widehat{ODC}$.

b) Ta có $\widehat{APC} = \frac{\text{sd}\widehat{BD} + \text{sd}\widehat{AC}}{2} = \frac{\text{sd}\widehat{BD} + \text{sd}\widehat{AB}}{2} = \frac{\text{sd}\widehat{AD}}{2} = \widehat{ACD}$.

Mà $\widehat{ACD} = \widehat{DAC}$ nên $\widehat{APC} = \widehat{PAC}$.

Suy ra tam giác APC cân tại $CA = CP$.

Mặt khác ta có $\widehat{BPD} = \widehat{APC} = \widehat{DAC} = \widehat{DBP}$ nên tam giác BDP cân tại D .

Mà DE là phân giác của $\widehat{BDP}$ nên $DE \perp BC$.

Tứ giác $DEMC$ có $\widehat{DEC} = \widehat{DMC} = 90^\circ$ nên là tứ giác nội tiếp. Suy ra: $\widehat{MEC} = \widehat{MDC} = \widehat{MDA}$.

Từ đó $\widehat{DBE} + \widehat{BEF} = \widehat{DAC} + \widehat{MDA} = 90^\circ$.

Do đó $EF \perp BD$ hay $ME \perp BD$.

c) Do tứ giác $OCMN$ nội tiếp nên $\widehat{MNC} = \widehat{MOC} = \frac{1}{2}\widehat{AOC} = \widehat{ADC} = 2\widehat{MDC}$.

Mặt khác ta lại có $\widehat{MNC} = \widehat{MEC} + \widehat{NME}$ và $\widehat{MEC} = \widehat{MDC}$ (câu b) nên $\widehat{NME} = \widehat{MEC}$.

Suy ra tam giác MNE cân tại N .

Chú ý rằng tứ giác $ABDC$ và $EMCD$ nội tiếp nên ta có: $\widehat{FAD} = \widehat{BCD} = \widehat{EMD} = \widehat{FMD}$.

Do đó tứ giác $FAMD$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{EFB} = \widehat{MDA} = \widehat{MDC} = \widehat{MEN} = \widehat{BEF}$.

Vậy tam giác BEF cân tại B . Mà $BD \perp EF$ nên BD là trung trực của EF .

Suy ra $DE = DF$, hay $\frac{DF}{DE} = 1$.

----- HẾT -----