

ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU
HỘI ĐỒNG TUYỂN SINH LỚP 10

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10

Năm học 2020 -2021

Môn thi: TOÁN (chuyên)

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1. (2,0 điểm)

Cho các phương trình $x^2 + ax + 3 = 0$ và $x^2 + bx + 5 = 0$ với a, b là tham số.

- a) Chứng minh rằng nếu $ab \geq 16$ thì hai phương trình trên có ít một phương trình có nghiệm.
b) Giả sử hai phương trình trên có nghiệm chung x_0 . Tìm a, b sao cho $|a| + |b|$ có giá trị nhỏ nhất.

Câu 2. (1,5 điểm)

Cho phương trình $3x^2 - y^2 = 2 \cdot 3^n$ với n là số tự nhiên.

- a) Chứng minh rằng nếu n chẵn thì phương trình đã cho không có nghiệm nguyên $(x; y)$.
b) Chứng minh rằng nếu n lẻ thì phương trình đã cho có nghiệm nguyên $(x; y)$.

Câu 3. (3,5 điểm)

Cho đường tròn (O) , dây cung BC không chứa O và điểm A thay đổi trên cung lớn $\widehat{BC}$. Lấy các điểm E và F thỏa mãn $\widehat{ABE} = \widehat{CAE} = \widehat{ACF} = \widehat{BAF} = 90^\circ$.

- a) Chứng minh $AE \cdot AB = AF \cdot AC$.
b) Hạ AD vuông góc với EF ($D \in EF$). Chứng minh các tam giác DAB và DAC đồng dạng và điểm D thuộc một đường tròn cố định.
c) Gọi G là giao điểm của AD với đường tròn (O) , ($G \neq A$). Chứng minh AD đi qua một điểm cố định và $GB \cdot AC = GC \cdot AB$.
d) Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF . Chứng minh AK đi qua một điểm cố định.

Câu 4. (1,5 điểm)

Cho số tự nhiên $a = 3^{13} \cdot 5^7 \cdot 7^{20}$.

- a) Gọi A là tập hợp các số nguyên dương k sao cho k là ước của a và k chia hết cho 105. Hỏi tập hợp A có bao nhiêu phần tử?
b) Giả sử B là một tập con bất kỳ của A có 9 phần tử. Chứng minh ta luôn có thể tìm được 2 phần tử của B sao tích của chúng là số chính phương.

Câu 5. (1,5 điểm)

Cho hệ phương trình với k là tham số:

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{yz}} + \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{x}{z}} = k \\ \frac{y}{\sqrt{zx}} + \sqrt{\frac{y}{z}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = k \\ \frac{z}{\sqrt{xy}} + \sqrt{\frac{z}{x}} + \sqrt{\frac{z}{y}} = k \end{cases}$$

- a) Giải hệ với $k = 1$.
b) Chứng minh hệ vô nghiệm với $k \geq 2$ và $k \neq 3$.

----- HẾT -----

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1.

a) Điều kiện xác định của M : $x \geq 0$. Với điều kiện này, ta có:

$$M = \frac{(\sqrt{x})^3 - 8}{x + 2\sqrt{x} + 4} = \frac{(\sqrt{x} - 2)(x + 2\sqrt{x} + 4)}{x + 2\sqrt{x} + 4} = \sqrt{x} - 2.$$

Do đó phương trình $M = x - 4$ tương đương:

$$\sqrt{x} - 2 = x - 4 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 1) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ thỏa } x \geq 0.$$

Vậy $x = 4$ là giá trị duy nhất cần tìm.

b) Điều kiện để ba biểu thức M , N , P cùng xác định là $x \geq 0$ và $x \neq 4$.

$$\text{Ta có: } N = \frac{(\sqrt{x} + 1)^3 - (\sqrt{x} - 1)^3}{(x - 4)(3x + 1)} = \frac{2(3x + 1)}{(x - 4)(3x + 1)} = \frac{2}{x - 4} = \frac{2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}.$$

$$\text{Do đó, ta có: } Q = (\sqrt{x} - 2) \cdot \frac{2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} = \frac{2}{\sqrt{x} + 2} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} = 1.$$

Vậy $Q = 1$.

Câu 2.

a) Điều kiện: $x \geq 0$ và $x \neq 1$. Phương trình tương đương $x^4 + 4x^2 - 5 = 0$ (1) hoặc $\sqrt{x + 3} = 3 - x$.

Ta có: (1) $\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x^2 + 5) = 0$. Do $x \geq 0$ và $x \neq 1$ nên phương trình này vô nghiệm.

$$\text{Lại có } (2) \Leftrightarrow \sqrt{x + 3} = 3 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x + 3 = (3 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ (x - 1)(x - 6) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \text{ Nhưng } x \geq 0 \text{ và } x \neq 1 \text{ nên}$$

phương trình này vô nghiệm.

Tóm lại phương trình đã cho vô nghiệm.

b) Điều kiện để (d) và (d₁) cắt nhau là $m \neq 1$. Ta lại có I thuộc (d) và (d₁), nên ta có hệ:

$$\begin{cases} 4m = 9 \\ 3m + 2n - mn = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{9}{4} \\ n = 3 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } mn = \frac{27}{4} \text{ và } \frac{m}{n} = \frac{3}{4}.$$

c) Độ dài đường chéo AC bằng đường kính của đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$ nên $AC = 10$ (cm).

Đặt $AB = a$ (cm) và $BC = b$ (cm) với $a, b > 0$. Khi đó diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là ab (cm²).

Theo giả thiết ta có: $2(a + b) = 28 \Rightarrow a + b = 14$.

Lại có $a^2 + b^2 = AC^2 = 100$.

$$\text{Suy ra: } ab = \frac{(a + b)^2 - (a^2 + b^2)}{2} = \frac{14^2 - 100}{2} = 48.$$

Vậy diện tích hình chữ nhật $ABCD$ bằng 48 (cm²).

Câu 3.

a) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $x^2 - 2mx - 3 = 0$.

Ta thấy $ac = 1 \cdot (-3) = -3 < 0$ nên phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ trái dấu nhau.

Do đó (P) luôn cắt (d) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ với mọi m .

Áp dụng định lý Viète, ta có: $x_1 + x_2 = 2m$ và $x_1 x_2 = -3$.

Do đó $y_1 + y_2 = (2mx_1 + 3) + (2mx_2 + 3) = 2m(x_1 + x_2) + 6 = 4m^2 + 6$.

Vậy $y_1 + y_2 = 4m^2 + 6$.

b) Ta có: $y_1 = x_1^2$ và $y_2 = x_2^2$ nên phương trình tương đương:

$$\begin{aligned} x_1^2 - 4x_2^2 &= x_1 - 4x_2 + 3x_1x_2 \Leftrightarrow x_1^2 - 3x_1x_2 - 4x_2^2 = x_1 - 4x_2 \\ &\Leftrightarrow (x_1 + x_2)(x_1 - 4x_2) = x_1 - 4x_2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2 - 1)(x_1 - 4x_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 = 4x_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Nếu $x_1 = 4x_2$ thì $x_1 x_2 = 4x_2^2 = -3$ vô lý.

Nếu $x_1 + x_2 = 1$ thì $2m = 1$ hay $m = \frac{1}{2}$.

Vậy $m = \frac{1}{2}$ là giá trị duy nhất cần tìm.

Câu 4.

Gọi x (tấn) là lượng gạo nhập vào kho trong ngày thứ nhất với $x > 0$. Khi đó lượng gạo nhập vào kho trong các ngày thứ hai, thứ ba, thứ tư lần lượt là $120\%x = \frac{6}{5}x$, $120\%\left(\frac{6}{5}x\right) = \frac{36}{25}x$ và $120\%\left(\frac{36}{25}x\right) = \frac{216}{125}x$.

a) Tổng lượng gạo đã nhập vào kho sau ngày thứ ba là $x + \frac{6}{5}x + \frac{36}{25}x = \frac{91}{25}x$ (tấn).

Theo giả thiết ta có: $\frac{91}{25}x = 91 \Leftrightarrow x = 25$.

Vậy ngày thứ nhất kho hàng đã nhập 25 tấn gạo.

b) Sau ngày thứ tư, tổng lượng gạo đã nhập vào kho là $x + \frac{6}{5}x + \frac{36}{25}x + \frac{216}{125}x = \frac{671}{125}x$ (tấn).

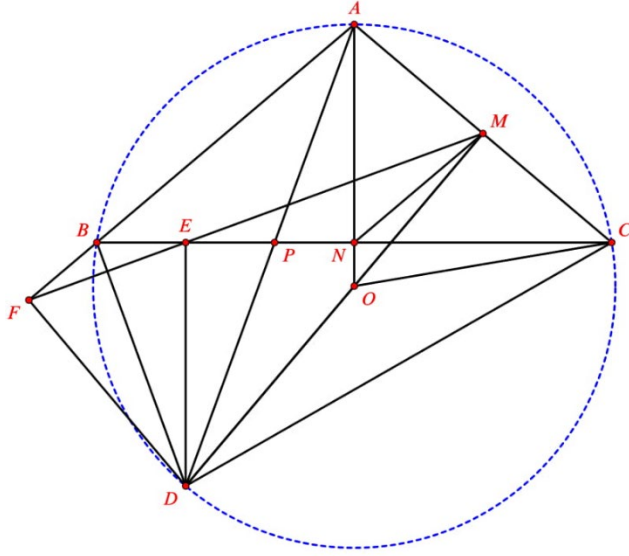
Do đó, lượng gạo trong kho đã xuất trong các ngày thứ năm và thứ sáu lần lượt là $\frac{1}{10}\left(\frac{671}{125}x\right)$ tấn và

$\frac{1}{10}\left[\frac{9}{10}\left(\frac{671}{125}x\right)\right] = \frac{9}{100}\left(\frac{671}{125}x\right)$ tấn. Theo giả thiết ta có:

$$\frac{1}{10}\left(\frac{671}{125}x\right) + \frac{9}{100}\left(\frac{671}{125}x\right) = 50,996 \Leftrightarrow x = 50.$$

Vậy ngày thứ nhất kho hàng đã nhập 50 tấn gạo.

Câu 5.



a) Do M là trung điểm của AC nên $OM \perp AC \Rightarrow \widehat{OMC} = 90^\circ$.

Lại có $AB = AC$ và $OB = OC$ nên AO là trung trực của $BC \Rightarrow AO \perp BC \Rightarrow \widehat{ONC} = 90^\circ$.

Từ đó suy ra tứ giác $OCMN$ nội tiếp.

Ta có: $AB = AC$ nên $\widehat{AB} = \widehat{AC}$ suy ra DA là tia phân giác của $\widehat{BDC}$ nên $\widehat{BDC} = 2\widehat{ADC}$ (1).

Mặt khác OM là trung trực của AC và $D \in OM$ nên DM là trung trực của AC .

Suy ra DM là phân giác của $\widehat{ADC} \Rightarrow \widehat{ADC} = 2\widehat{ODC}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BDC} = 4\widehat{ODC}$.

b) Ta có $\widehat{APC} = \frac{\text{sd}\widehat{BD} + \text{sd}\widehat{AC}}{2} = \frac{\text{sd}\widehat{BD} + \text{sd}\widehat{AB}}{2} = \frac{\text{sd}\widehat{AD}}{2} = \widehat{ACD}$.

Mà $\widehat{ACD} = \widehat{DAC}$ nên $\widehat{APC} = \widehat{PAC}$.

Suy ra tam giác APC cân tại $CA = CP$.

Mặt khác ta có $\widehat{BPD} = \widehat{APC} = \widehat{DAC} = \widehat{DBP}$ nên tam giác BDP cân tại D .

Mà DE là phân giác của $\widehat{BDP}$ nên $DE \perp BC$.

Tứ giác $DEMC$ có $\widehat{DEC} = \widehat{DMC} = 90^\circ$ nên là tứ giác nội tiếp. Suy ra: $\widehat{MEC} = \widehat{MDC} = \widehat{MDA}$.

Từ đó $\widehat{DBE} + \widehat{BEF} = \widehat{DAC} + \widehat{MDA} = 90^\circ$. Do đó $EF \perp BD$ hay $ME \perp BD$.

c) Do tứ giác $OCMN$ nội tiếp nên $\widehat{MNC} = \widehat{MOC} = \frac{1}{2}\widehat{AOC} = \widehat{ADC} = 2\widehat{MDC}$.

Mặt khác ta lại có $\widehat{MNC} = \widehat{MEC} + \widehat{NME}$ và $\widehat{MEC} = \widehat{MDC}$ (câu b) nên $\widehat{NME} = \widehat{MEC}$.

Suy ra tam giác MNE cân tại N .

Chú ý rằng tứ giác $ABDC$ và $EMCD$ nội tiếp nên ta có: $\widehat{FAD} = \widehat{BCD} = \widehat{EMD} = \widehat{FMD}$.

Do đó tứ giác $FAMD$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{EFB} = \widehat{MDA} = \widehat{MDC} = \widehat{MEN} = \widehat{BEF}$.

Vậy tam giác BEF cân tại B . Mà $BD \perp EF$ nên BD là trung trực của EF .

Suy ra $DE = DF$, hay $\frac{DF}{DE} = 1$.

----- HẾT -----