

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề thi gồm 01 trang

Bài 1.

a, Giải phương trình: $\frac{26x+5}{\sqrt{x^2+30}} + 2\sqrt{26x+5} = 3\sqrt{x^2+30}$

b, Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ (x+2y)(2+3y^2+4xy) = 27 \end{cases}$$

Bài 2.

a, Tìm tất cả các cặp số nguyên thỏa mãn: $(x^2 - x + 1)(y^2 + xy) = 3x - 1$

b, Với x, y là các số thực thay đổi thỏa mãn $1 \leq y \leq 2$ và $xy + 2 \geq 2y$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \frac{x^2 + 4}{y^2 + 1}$

Bài 3. Cho hình vuông ABCD, đường tròn (O) nội tiếp hình vuông tiếp xúc với các cạnh AB, AD tại hai điểm E, F. Gọi G là giao điểm các đường thẳng CE và BF.

a, Chứng minh rằng năm điểm A, F, O, G, E cùng nằm trên một đường tròn

b, Gọi giao điểm của đường thẳng FB và đường tròn là M ($M \neq F$). CMR M là trung điểm của đoạn thẳng BG.

c, CMR trực tâm của tam giác GAF nằm trên đường tròn (O)

Bài 4. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy + yz + xz = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} \geq \frac{2}{3} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \right)^3$$

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

a, Điều kiện $x \geq -\frac{5}{26}$ đặt $a = \sqrt{26x+5}$ và $b = \sqrt{x^2+30}$ ($a \geq 0, b > 0$)

Phương trình trở thành

$$\frac{a^2}{b} + 2a = 3b \Leftrightarrow (a-b)(a+3b) = 0 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \sqrt{26x+5} = \sqrt{x^2+30}$$

Vậy $x = 1$ hoặc 25 là nghiệm của phương trình.

b, thay $2 = x^2 + y^2$ vào phương trình thứ 2 ta được

$$(x+2y)(x^2+y^2+3y^2+4xy) = 27$$

$$\Leftrightarrow (x+2y)^3 = 27$$

$$\Leftrightarrow x = 3 - 2y \text{ thay vào PT thứ nhất ta được } (3-2y)^2 + y^2 = 0$$

$$y = 1 \text{ hoặc } y = \frac{7}{5}$$

$$x = 1 \text{ hoặc } \frac{1}{5}$$

Bài 2.

a, từ biểu thức $(x^2-x+1)(y^2+xy) = 3x-1$ ta nhận thấy $3x-1$ phải chia hết cho (x^2-x+1)

ta có $(3x-1)(3x-2) = 9x^2-9x+2 = 9(x^2-x+1) - 7$ cũng phải chia hết cho (x^2-x+1)

suy ra 7 chia hết cho (x^2-x+1)

$$(x^2-x+1) = 1 \text{ hoặc } 7$$

$y = 0, 1, 3$ và -2 lần lượt thay vào ta có $y \Rightarrow (x,y) = (1, 1), (1, -2)$ và $(-2, 1)$

b, Từ giả thiết $xy + 2 \geq 2y \Rightarrow 4xy + 8 \geq 8y$

Mà ta lại có $4x^2 + y^2 \geq 4xy$

$$\Rightarrow 4x^2 + y^2 + 8 \geq 4xy + 8 \geq 8y$$

$$\Rightarrow 4(x^2 + 4) \geq 8y + 8 - y^2$$

$$\Rightarrow 4(x^2 + 4) \geq 4(y^2 + 1) + (5y + 2)(2 - y) \geq 4(y^2 + 1)$$

$$\Rightarrow M = \frac{x^2 + 4}{y^2 + 1} \geq 1$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 1$ và $y = 2$, $M_{\min} = 1$.

Bài 3.

a, Do đường tròn (O) nội tiếp hình vuông ABCD nên E và F là trung điểm các cạnh AB và AD $\Rightarrow \Delta ABF$ và ΔBCE bằng nhau $\Rightarrow$ góc EBG bằng góc BCG $\Rightarrow$ góc BGC vuông $\Rightarrow$ AEGF cùng nằm trên một đường tròn, mà AEOF cũng nằm trên một đường tròn $\Rightarrow$ AEGOF cùng nằm trên một đường tròn.

b, Ta có AB là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên

góc BEM = góc EFM,

lại có góc EAG và EFG cùng chắn cung EG nên góc EAG = EFG

suy ra EM//AG trong khi E là trung điểm của AB $\Rightarrow$ M cũng là trung điểm của BG

Bài 4.

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} \geq \frac{2}{3} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \right)^3$$

Ta có:

$$1+x^2 = xy + yz + xz + x^2 = (x+y)(x+z)$$

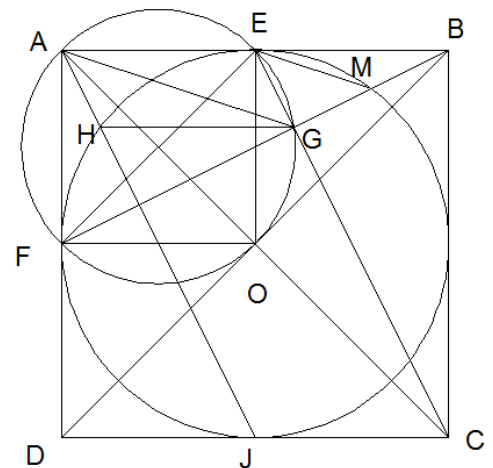
$$1+y^2 = xy + yz + xz + y^2 = (x+y)(y+z)$$

$$1+z^2 = xy + yz + xz + z^2 = (z+y)(x+z)$$

$$VT = \frac{2(x+y+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

Ta có:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \right)^2 \leq (x+y+z) \left(\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \right)$$



$$= (x+y+z) \left(\frac{x}{(x+y)(x+z)} + \frac{y}{(x+y)(y+z)} + \frac{z}{(z+y)(x+z)} \right)$$

$$= \frac{2(x+y+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

Do đó

$$VP = \frac{4(x+y+z)}{3(x+y)(y+z)(z+x)} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \right)$$

Bất đẳng thức trở thành

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{3}{2}$$

Ta có:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x+y} + \frac{x}{x+z} \right)$$

$$\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{(x+y)(y+z)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x+y} + \frac{y}{y+z} \right)$$

$$\frac{z}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{z}{\sqrt{(x+z)(y+z)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{z}{x+z} + \frac{z}{y+z} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{3}{2}$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$

----- HẾT -----