

Câu 1: (2,0 điểm)

1) Rút gọn biểu thức: $A = \sqrt{32} - \sqrt{6} \cdot \sqrt{3} + \frac{\sqrt{22}}{\sqrt{11}}$

2) Giải phương trình: $x^2 - 2x = 0$

3) Xác định hệ số a của hàm số $y = ax^2$. Biết đồ thị hàm số đó đi qua điểm $A(-3; 1)$.

Câu 2: (2,0 điểm) Cho phương trình: $x^2 - (2m - n)x + (2m + 3n - 1) = 0$ (1) (m, n là tham số)

1) Với $n = 0$, chứng minh rằng phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi giá trị của m .

2) Tìm m, n để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = -1$ và $x_1^2 + x_2^2 = 13$.

Câu 3: (2,0 điểm)

1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng d có phương trình $y = -x + \frac{\sqrt{2}}{2}$. Gọi A, B lần lượt là giao điểm của d với trục hoành và trục tung; H là trung điểm của AB. Tính độ dài đoạn thẳng OH (đơn vị đo trên các trục tọa độ là xentimét).

2) Một cốc nước dạng hình trụ có chiều cao 12cm, bán kính đáy 2cm, lượng nước trong cốc cao 8cm. Người ta thả vào cốc nước 6 viên bi hình cầu có cùng bán kính 1cm và ngập hoàn toàn trong nước làm nước trong cốc dâng lên. Hỏi sau khi thả 6 viên bi vào thì mực nước trong cốc cách miệng cốc bao nhiêu xentimét? (Giả sử độ dày của cốc là không đáng kể).

Câu 4: (3,0 điểm)

Cho đường tròn (O) hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau. Điểm M thuộc cung nhỏ BD sao cho $\angle BOM = 30^\circ$. Gọi N là giao điểm của CM và OB. Tiếp tuyến tại M của đường tròn (O) cắt OB, OD kéo dài lần lượt tại E và F. Đường thẳng qua N và vuông góc với AB cắt EF tại P.

1) Chứng minh tứ giác ONMP là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh tam giác EMN là tam giác đều.

3) Chứng minh: $CN = OP$.

4) Gọi H là trực tâm tam giác AEF. Hỏi ba điểm A, H, P có thẳng hàng không? Vì sao?

Câu 5: (1,0 điểm) Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + 2y + 3z = 2$. Tìm giá trị lớn nhất

của: $S = \sqrt{\frac{xy}{xy + 3z}} + \sqrt{\frac{3yz}{3yz + x}} + \sqrt{\frac{3xz}{3xz + 4y}}$

----- Hết -----

SƠ LƯỢC BÀI GIẢI

Câu 1: (2,0 điểm)

$$1) A = \sqrt{32} - \sqrt{6} \cdot \sqrt{3} + \frac{\sqrt{22}}{\sqrt{11}} = 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$2) x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$3) \text{ Vì đồ thị hàm số } y = ax^2 \text{ đi qua điểm } A(-3; 1), \text{ nên có: } 1 = a \cdot (-3)^2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{9}$$

Câu 2: (2,0 điểm)

$$1) \text{ Với } n = 0, \text{ phương trình (1) trở thành: } x^2 - 2mx + (2m - 1) = 0$$

$$\text{Ta có: } \Delta' = (-m)^2 - (2m - 1) = m^2 - 2m + 1 = (m - 1)^2 \geq 0; \forall m$$

Do đó phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi giá trị của m .

$$2) \text{ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt } x_1, x_2 \text{ khi } \Delta = (2m - n)^2 - 4(2m + 3n - 1) > 0 (*)$$

$$\text{Theo hệ thức Viét, ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - n \\ x_1 x_2 = 2m + 3n - 1 \end{cases}$$

$$\text{Theo giả thiết, ta có: } x_1 + x_2 = -1 \text{ và } x_1^2 + x_2^2 = 13$$

$$\text{Do đó } 2m - n = -1$$

$$\text{và } x_1^2 + x_2^2 = 13 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 13 \Leftrightarrow (-1)^2 - 2(2m + 3n - 1) = 13 \Leftrightarrow 2m + 3n = -5$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} 2m - n = -1 \\ 2m + 3n = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4n = -4 \\ m = \frac{n-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = -1 \\ m = -1 \end{cases} \text{ (thỏa mãn (*))}$$

Vậy $m = n = -1$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = -1$ và $x_1^2 + x_2^2 = 13$.

Câu 3: (2,0 điểm)

$$1) \text{ Ta có: } A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right), B\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1 \text{ (cm)}$$

$$OH \text{ là trung tuyến ứng với cạnh huyền của } \triangle AOB \text{ vuông tại O} \Rightarrow OH = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \text{ (cm)}$$

$$2) \text{ Thể tích của 6 viên bi là } V_1 = 6 \cdot \frac{4}{3}\pi R_1^3 = 6 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 = 8\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

$$\text{Chiều cao cột nước hình trụ bán kính đáy } 2 \text{ cm có thể tích } V_1 \text{ là } h = \frac{V_1}{\pi R^2} = \frac{8\pi}{\pi \cdot 2^2} = 2 \text{ (cm)}$$

$$\text{Mức nước trong cốc cách miệng cốc là: } 12 - (8 + 2) = 2 \text{ (cm)}$$

Câu 4: (3,0 điểm)

$\Rightarrow OAF = OPE$ mà $OPE = EMN = 60^\circ$ ($CN // OP$) do đó $OAF = 60^\circ$

$\triangle AEF : EAF = 60^\circ$ (cmt), $AEF = 60^\circ$ ($\triangle EMN$ đều). Vậy tam giác AEF là tam giác đều.

Lại có $FO \perp AE$ (gt) $\Rightarrow OA = OE = \frac{1}{2}AE$ (vô lý). Vậy A, H, P không thẳng hàng.

Câu 5: (1,0 điểm)

Đặt $x = a, 2y = b, 3z = c \Rightarrow a, b, c > 0; a + b + c = 2$ và

$$\frac{xy}{xy + 3z} = \frac{ab}{2} : \left(\frac{ab}{2} + c \right) = \frac{ab}{ab + 2c} = \frac{ab}{ab + (a + b + c)c} = \frac{ab}{(a + c)(b + c)};$$

$$\frac{3yz}{3yz + x} = \frac{bc}{2} : \left(\frac{bc}{2} + a \right) = \frac{bc}{bc + 2a} = \frac{bc}{bc + (a + b + c)a} = \frac{bc}{(a + b)(a + c)};$$

$$\frac{3xz}{3xz + 4y} = ac : (ac + 2b) = \frac{ac}{ac + 2b} = \frac{ac}{ac + (a + b + c)b} = \frac{ac}{(a + b)(b + c)}$$

$$\text{Do đó } S = \sqrt{\frac{ab}{(a + c)(b + c)}} + \sqrt{\frac{bc}{(a + b)(a + c)}} + \sqrt{\frac{ac}{(a + b)(b + c)}}$$

Áp dụng bất đẳng thức $\sqrt{AB} \leq \frac{1}{2}(A + B)$ ($A \geq 0, B \geq 0$; dấu "=" xảy ra khi $A = B$)

$$\text{Ta có } \sqrt{\frac{ab}{(a + c)(b + c)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a}{a + c} + \frac{b}{b + c} \right); \sqrt{\frac{bc}{(a + b)(a + c)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a + b} + \frac{c}{a + c} \right);$$

$$\sqrt{\frac{ac}{(a + b)(b + c)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a}{a + b} + \frac{c}{b + c} \right). \text{ Nên } S \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a + c}{a + c} + \frac{b + c}{b + c} + \frac{a + b}{a + b} \right) = \frac{3}{2}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} \frac{a}{a + c} = \frac{b}{b + c} \\ \frac{b}{a + b} = \frac{c}{a + c} \\ \frac{a}{a + b} = \frac{c}{b + c} \\ a + b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}; y = \frac{1}{3}; z = \frac{2}{9}$$

$$\text{Vậy } \max(S) = \frac{3}{2} \text{ khi } x = \frac{2}{3}; y = \frac{1}{3}; z = \frac{2}{9}$$