

Câu 1: (1,5 điểm)

- 1) Tìm x , biết: $2\sqrt{x} = 3$
- 2) Giải phương trình: $43x^2 - 2018x + 1975 = 0$
- 3) Cho hàm số $y = (a+1)x^2$. Tìm a để hàm số nghịch biến khi $x < 0$ và đồng biến khi $x > 0$

Câu 2: (2,0 điểm) Cho phương trình: $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2 = 0$ (1), m là tham số.

- 1) Tìm m để $x = 2$ là nghiệm của phương trình (1);
- 2) Xác định m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

Câu 3: (2,0 điểm)

- 1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho các đường thẳng có phương trình:

$$(d_1): y = x + 2; \quad (d_2): y = -2; \quad (d_3): y = (k+1)x + k.$$

Tìm k để các đường thẳng trên đồng quy.

- 2) Rút gọn và tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$A = \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{3} \quad (x \geq 0, x \neq 1)$$

Câu 4: (3,5 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và $\hat{A} = 45^\circ$. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của B, C lên AC, AB; H là giao điểm của BD và CE.

- 1) Chứng minh tứ giác BEDC nội tiếp.
- 2) Chứng minh: $DE \cdot AB = BC \cdot AD$ và tính tỉ số $\frac{ED}{BC}$.
- 3) Chứng minh: $HE + HD = BE + CD$.
- 4) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC. Chứng minh $AI \perp DE$.

Câu 5: (1,0 điểm)

Cho n là số tự nhiên khác 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$Q = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} + \frac{101}{n+1}$$

SƠ LƯỢC BÀI GIẢI

Câu 1: (1,5 điểm)

1) ĐK: $x \geq 0$. Ta có $2\sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{9}{4}$ (TMĐK). Vậy $x = \frac{9}{4}$

2) Vì $a + b + c = 43 - 2018 + 1975 = 0$.

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x_1 = 1; x_2 = \frac{1975}{43}$

3) Hàm số $y = (a+1)x^2$ nghịch biến khi $x < 0$ và đồng biến khi $x > 0 \Leftrightarrow a+1 > 0 \Leftrightarrow a > -1$

Câu 2: (2,0 điểm)

1) $x = 2$ là nghiệm của phương trình (1) $\Leftrightarrow 2^2 - 2(m+1) \cdot 2 + m^2 + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4m + 2 = 0 \Leftrightarrow (m-2)^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (m-2-\sqrt{2})(m-2+\sqrt{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-2-\sqrt{2} = 0 \\ m-2+\sqrt{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2+\sqrt{2} \\ m = 2-\sqrt{2} \end{cases}$$

2) Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - (m^2 + 2) > 0 \Leftrightarrow 2m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$$

Theo Viét, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1 x_2 = m^2 + 2 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } x_1^2 + x_2^2 = 10 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 10 \Leftrightarrow [2(m+1)]^2 - 2(m^2 + 2) = 10$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 4m - 5 = 0 \Leftrightarrow (m-1)(m+5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 = 0 \\ m+5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 (tm) \\ m = -5 (l) \end{cases}$$

Vậy $m = 1$ thì PT (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 = 10$.

Câu 3: (2,0 điểm)

1) Tọa độ giao điểm của $(d_1), (d_2)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \end{cases}$

Do đó các đường thẳng trên đồng quy $\Leftrightarrow (d_3)$ đi qua điểm $(-4; -2)$

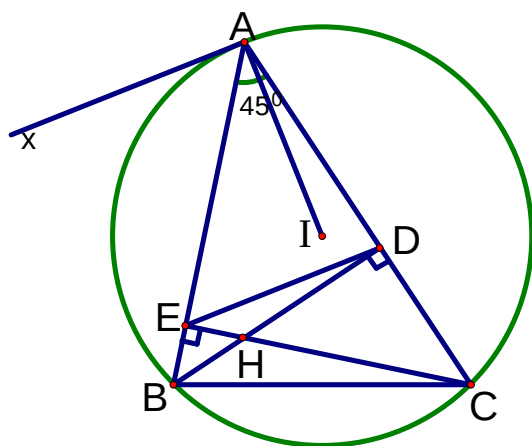
$$\Leftrightarrow -2 = -4(k+1) + k \Leftrightarrow 3k = -2 \Leftrightarrow k = -\frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} 2) A &= \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{3} \\ &= \frac{-(x+\sqrt{x}+1) + x+2 + \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{3}{\sqrt{x}-1} = \frac{3(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)^2(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{3}{x+\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

$$\text{Vì } x \geq 0 \Rightarrow x + \sqrt{x} + 1 \geq 1 \Rightarrow A = \frac{3}{x+\sqrt{x}+1} \leq 3$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$ (tmdk). Vậy $\text{Max}(A) = 3 \Leftrightarrow x = 0$.

Câu 4: (3,5 điểm)



1) Chứng minh tứ giác BEDC nội tiếp.

$\widehat{BDC} = \widehat{BEC} = 90^\circ$ ($BD \perp AC, CE \perp AB$). Vậy tứ giác BEDC nội tiếp.

2) Chứng minh: $DE \cdot AB = BC \cdot AD$ và tính tỉ số $\frac{ED}{BC}$.

Xét $\triangle ADE$ và $\triangle ABC$, ta có: $\widehat{A}$ (góc chung); $\widehat{AED} = \widehat{ACB}$ (tứ giác BEDC nội tiếp)

$$\Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AD}{DE} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow DE \cdot AB = BC \cdot AD \text{ (đpcm)}$$

$$\text{Từ } \frac{AD}{DE} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}.$$

$$\text{Lại có } \triangle ABD: \widehat{ADB} = 90^\circ \text{ (gt)} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \cos \widehat{BAD} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Vậy } \frac{DE}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3) Chứng minh: $HE + HD = BE + CD$.

$$\triangle ABD: \widehat{ADB} = 90^\circ \text{ (gt)}, \widehat{BAD} = 45^\circ \text{ (gt)} \Rightarrow \widehat{ABD} = 45^\circ$$

$$\triangle BEH: \widehat{BEH} = 90^\circ \text{ (gt)}, \widehat{EBH} = \widehat{ABD} = 45^\circ \text{ (cmt)}$$

Do đó $\triangle BEH$ vuông cân tại E $\Rightarrow HE = BE$ (a)

Chứng minh tương tự có: $\triangle CDH$ vuông cân tại D $\Rightarrow HD = CD$ (b)

Từ (a), (b) suy ra $HE + HD = BE + CD$ (đpcm)

4) Chứng minh $AI \perp DE$.

Kẻ tiếp tuyến Ax của đường tròn (I) $\Rightarrow Ax \perp AI$ (*)

$$\text{và } \widehat{BAx} = \widehat{ACB} = \frac{1}{2} \text{sd } \widehat{AB} \text{ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung chắn}$$

cung $\widehat{AB}$ của đường tròn (I))

$$\text{Lại có } \widehat{AED} = \widehat{ACB} \text{ (tứ giác BEDC nội tiếp)} \Rightarrow \widehat{BAx} = \widehat{AED} \Rightarrow Ax \parallel DE \text{ (**)}$$

Từ (*), (**) suy ra $AI \perp DE$ (đpcm)

Câu 5: (1,0 điểm)

Cho n là số tự nhiên khác 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$Q = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} + \frac{101}{n+1}$$

Vì n là số tự nhiên khác 0, nên ta có:

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}} &= \sqrt{1+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)^2+\frac{2}{n(n+1)}} = \sqrt{1+\left[\frac{1}{n(n+1)}\right]^2+\frac{2}{n(n+1)}} \\ &= \sqrt{\left[1+\frac{1}{n(n+1)}\right]^2} = 1+\frac{1}{n(n+1)} = 1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Do đó: } Q &= \left(1+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right) + \left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{101}{n+1} \\ &= n+1 - \frac{1}{n+1} + \frac{101}{n+1} = n+1 + \frac{100}{n+1}\end{aligned}$$

Vì n là số tự nhiên khác 0 nên $n+1 > 0$; $\frac{100}{n+1} > 0$. Áp dụng BĐT $A+B \geq 2\sqrt{AB}$

$$\text{Ta có } Q \geq 2\sqrt{(n+1) \cdot \frac{100}{n+1}} = 2\sqrt{100} = 20$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow n+1 = \frac{100}{n+1} \Leftrightarrow (n+1)^2 = 100 \Leftrightarrow n+1 = 10 \Leftrightarrow n = 9 \text{ (do } n+1 > 0)$$

$$\text{Vậy } \min(Q) = 20 \Leftrightarrow n = 9$$