

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1 (2,0 điểm)

- 1) Giải phương trình $\sqrt{2x+3} = x$.
- 2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng $y = -x - 2$ (d_1) và $y = \frac{3}{2}x + 3$ (d_2). Gọi A , B lần lượt là giao điểm của (d_1), (d_2) với trục Oy và C là giao điểm của (d_1) với (d_2). Tính diện tích tam giác ABC .
- 3) Cho tam giác ABC có $AB = 8(cm)$, $BC = 17(cm)$, $CA = 15(cm)$. Tính chu vi đường tròn nội tiếp tam giác ABC .
- 4) Một hình nón có chu vi đường tròn đáy là $6\pi(cm)$, độ dài đường sinh là $5(cm)$. Tính thể tích hình nón đó.

Câu 2 (1,5 điểm) Cho biểu thức $P = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} \right)$ (với $x > 0$ và $x \neq 1$).

- 1) Rút gọn biểu thức P .
- 2) Chứng minh rằng với mọi $x > 0$ và $x \neq 1$ thì $P > 4$.

Câu 3 (2,5 điểm)

- 1) Cho phương trình $x^2 - mx - m^2 + m - 4 = 0$ (với m là tham số).
 - a) Chứng minh với mọi giá trị của tham số m , phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt.
 - b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình đã cho ($x_1 < x_2$). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $|x_2| - |x_1| = 2$.

2) Giải phương trình $6\sqrt{x+2} + 3\sqrt{3-x} = 3x + 1 + 4\sqrt{-x^2 + x + 6}$.

Câu 4 (3,0 điểm) Cho tam giác ABC (với $AB < AC$) ngoại tiếp đường tròn (O ; R). Đường tròn (O ; R) tiếp xúc với các cạnh BC , AB lần lượt tại D , N . Kẻ đường kính DI của đường tròn (O ; R). Tiếp tuyến của đường tròn (O ; R) tại I cắt các cạnh AB , AC lần lượt tại E , F .

- 1) Chứng minh tam giác BOE vuông và $EI \cdot BD = FI \cdot CD = R^2$.
- 2) Gọi P , K lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC , AD ; Q là giao điểm của BC và AI . Chứng minh $AQ = 2KP$.
- 3) Gọi A_1 là giao điểm của AO với cạnh BC , B_1 là giao điểm của BO với cạnh AC , C_1 là giao điểm của CO với cạnh AB và (O_1 ; R_1) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Chứng minh: $\frac{1}{AA_1} + \frac{1}{BB_1} + \frac{1}{CC_1} < \frac{2}{R_1 - OO_1}$.

Câu 5 (1,0 điểm)

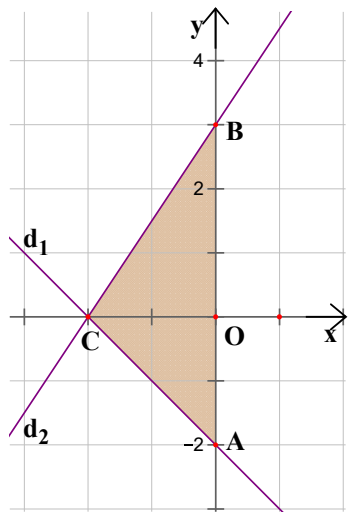
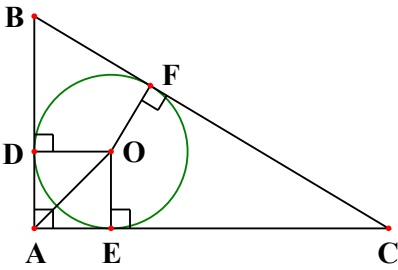
- 1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (2x+4y-1)\sqrt{2x-y-1} = (4x-2y-3)\sqrt{x+2y} & (1) \\ x^2+8x+5-2(3y+2)\sqrt{4x-3y} = 2\sqrt{2x^2+5x+2} & (2) \end{cases}$$
- 2) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + 2bc + 2ca = 7$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = \frac{11a+11b+12c}{\sqrt{8a^2+56} + \sqrt{8b^2+56} + \sqrt{4c^2+7}}$.

----- HẾT -----

Họ và tên thí sinh:
Số báo danh:

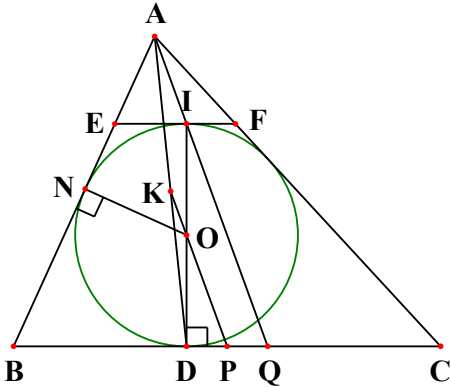
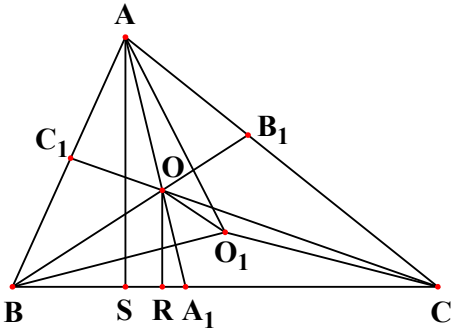
Họ tên, chữ kí GT 1:
Họ tên, chữ kí GT 2:

HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ BIỂU ĐIỂM DỰ KIẾN:

Câu	Phần	Nội dung	Điểm
Câu 1 (2,0đ)	1)	$\sqrt{2x+3} = x$ (1) (ĐK: $x \geq 0$) $(1) \Rightarrow x^2 = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$ Kết hợp với điều kiện $\Rightarrow x = 3$ Vậy nghiệm của phương trình là $x = 3$.	0.5
	2)	Đường thẳng (d_1) đi qua các điểm $(0; -2)$ và $(-2; 0)$ Đường thẳng (d_2) đi qua các điểm $(0; 3)$ và $(-2; 0)$ Theo đề bài, ta có: $A(0; -2)$, $B(0; 3)$, $C(-2; 0)$ $\Rightarrow CO = 2$; $AB = 5$ Diện tích của ΔABC là: $S = \frac{AB \cdot OC}{2} = \frac{5 \cdot 2}{2} = 5$ (đơn vị diện tích) 	0.5
	3)	Ta có: $BC^2 = 17^2 = 289$ $AB^2 + AC^2 = 8^2 + 15^2 = 289$ $\Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$ $\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A (định lý Py-ta-go đảo) Vẽ (O; R) nội tiếp ΔABC , (O) tiếp xúc AB, AC, BC lần lượt tại D, E, F.  $\widehat{DAE} = \widehat{ADE} = \widehat{AED} = 90^\circ$ $\Rightarrow$ Tứ giác ADOE là hình chữ nhật Lại có $OD = OE = R$ Tứ giác ADOE là hình vuông $\Rightarrow AD = OD = R$ Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có: $AD = AE$, $BD = BF$, $CE = CF$ $\Rightarrow AB + AC = AD + BD + AE + CE = AD + BF + AD + CF$ $\quad \quad \quad = 2AD + BC$ $\Rightarrow AD = (AB + AC - BC) : 2 = (8 + 15 - 17) : 2 = 3(\text{cm})$ $\Rightarrow R = 3\text{cm}$.	0.5
	4)	Bán kính đường tròn đáy là: $r = \frac{C}{2\pi} = \frac{6\pi}{2\pi} = 3(\text{cm})$ Gọi ℓ là độ dài đường sinh, h là chiều cao của hình nón Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có: $h = \sqrt{\ell^2 - r^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4(\text{cm})$	0.5

		Thể tích hình nón là: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12 \text{ (cm}^3\text{)}$	
Câu 2 (1,5đ)	1)	$ \begin{aligned} P &= \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} \right) \\ &= \frac{x-1}{\sqrt{x}} : \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)+1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{x-1}{\sqrt{x}} : \frac{x-1+1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{x-1}{\sqrt{x}} : \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} : \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}} \\ \text{Vậy } P &= \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}} \text{ với } x > 0 \text{ và } x \neq 1. \end{aligned} $	1.0
	2)	Với $x > 0$ và $x \neq 1$, ta có: $P = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2 + 4\sqrt{x}}{\sqrt{x}} > \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 4$ Vậy với mọi $x > 0$ và $x \neq 1$ thì $P > 4$.	0.5
Câu 3 (2,5đ)	1a)	Phương trình $x^2 - mx - m^2 + m - 4 = 0$ Ta có hệ số $c = -m^2 + m - 4 = -\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{15}{4} < 0$ $\Rightarrow ac < 0 \Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm trái dấu Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.	0.75
	1b)	Vì phương trình có hai nghiệm trái dấu $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 < 0 < x_2$ Do đó: $x_2 - x_1 = 2 \Leftrightarrow x_2 + x_1 = 2$ Áp dụng hệ thức Vi-ét, ta có: $x_1 + x_2 = m$ $\Rightarrow m = 2$ Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.	0.75
	2)	$ \begin{aligned} 6\sqrt{x+2} + 3\sqrt{3-x} &= 3x+1+4\sqrt{-x^2+x+6} \\ \Leftrightarrow 6\sqrt{2+x} + 3\sqrt{3-x} &= 3x+1+4\sqrt{(2+x)(3-x)} \\ \text{ĐK: } -2 \leq x \leq 3 \\ \text{Đặt } a = \sqrt{2+x}, b = \sqrt{3-x} \text{ (} a, b \geq 0 \text{)} &\Rightarrow 3x+1 = 4a^2 + b^2 - 10 \\ \text{Phương trình trở thành:} \end{aligned} $	1.0

		$6a + 3b = 4a^2 + b^2 - 10 + 4ab$ $\Leftrightarrow 3(2a + b) = (2a + b)^2 - 10$ $\Leftrightarrow (2a + b)^2 - 3(2a + b) - 10 = 0$ $\Leftrightarrow (2a + b + 2)(2a + b - 5) = 0$ $\Leftrightarrow 2a + b - 5 = 0 \text{ (do } a, b \geq 0 \Rightarrow 2a + b + 2 > 0)$ $\Leftrightarrow 2a + b = 5$ $\Leftrightarrow 2\sqrt{2+x} + \sqrt{3-x} = 5$ <u>Cách 1:</u> $2\sqrt{2+x} + \sqrt{3-x} = 5$ $\Leftrightarrow 4(2+x) + 4\sqrt{(2+x)(3-x)} + 3-x = 25$ $\Leftrightarrow 3x + 11 + 4\sqrt{(2+x)(3-x)} = 25$ $\Leftrightarrow 4\sqrt{(2+x)(3-x)} = 14 - 3x$ $\Leftrightarrow 16(6+x-x^2) = 196 - 84x + 9x^2 \text{ (do } x \leq 3 \Rightarrow 14 - 3x > 0)$ $\Leftrightarrow 25x^2 - 100x + 100 = 0$ $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$ $\Leftrightarrow (x-2)^2 = 0$ $\Leftrightarrow x = 2 \text{ (thỏa mãn ĐK)}$ Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 2$ <u>Cách 2:</u> Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có: $\left(2\sqrt{2+x} + \sqrt{3-x}\right)^2 \leq (2^2 + 1^2)(2+x+3-x) = 25$ $\Rightarrow 2\sqrt{2+x} + \sqrt{3-x} \leq 5$ Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2+x}}{2} = \sqrt{3-x} \Leftrightarrow 2+x = 12-4x \Leftrightarrow x = 2$	
Câu 4 (3,0đ)			0.25
	1)	Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có: OB là tia phân giác của góc NOD, OE là tia phân giác của góc NOI Mà góc NOD kề bù với góc NOI $\Rightarrow OB \perp OE \Rightarrow \Delta BOE$ vuông tại O	0.75
		Ta có: $\widehat{O_1} + \widehat{O_2} = \widehat{DOI} - \widehat{BOE} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ $\widehat{B_1} + \widehat{O_2} = 90^\circ$ (ΔBOD vuông tại D)	

	$\Rightarrow \widehat{O}_1 = \widehat{B}_1$ $\Delta IOE \text{ và } \Delta DBO \text{ có: } \widehat{OIE} = \widehat{ODB} = 90^\circ, \widehat{O}_1 = \widehat{B}_1$ $\Rightarrow \Delta IOE \sim \Delta DBO \text{ (g.g)}$ $\Rightarrow \frac{OI}{BD} = \frac{EI}{OD} \Rightarrow EI \cdot BD = OI \cdot OD = R^2$ Chứng minh tương tự, ta được $FI \cdot CD = R^2$ Vậy $EI \cdot BD = FI \cdot CD = R^2$	
2)	 Từ $EI \cdot BD = FI \cdot CD \Rightarrow \frac{EI}{FI} = \frac{CD}{BD}$ (1) $EF \parallel BC (\perp DI)$. Áp dụng hệ quả của định lý Ta-lét, ta có: $\frac{EI}{BQ} = \frac{FI}{CQ} \left(= \frac{AI}{AQ} \right) \Rightarrow \frac{EI}{FI} = \frac{BQ}{CQ}$ (2) Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{BQ}{CQ} \Rightarrow \frac{CD}{BQ} = \frac{BD}{CQ} = \frac{CD + BD}{BQ + CQ} = \frac{BC}{BC} = 1 \Rightarrow BD = CQ$ Lại có $BP = CP \Rightarrow BP - BD = CP - CQ \Rightarrow PD = PQ$ Vì $KD = KA$ và $PD = PQ$ $\Rightarrow KP$ là đường trung bình của ΔDAQ $\Rightarrow AQ = 2KP$	0.5
3)	 Ta có: $\frac{1}{AA_1} + \frac{1}{BB_1} + \frac{1}{CC_1} < \frac{2}{R_1 - OO_1}$ $\Leftrightarrow \frac{R_1 - OO_1}{AA_1} + \frac{R_1 - OO_1}{BB_1} + \frac{R_1 - OO_1}{CC_1} < 2$	1.0

		Lại có: $\frac{R_1 - OO_1}{AA_1} = \frac{O_1A - OO_1}{AA_1} \leq \frac{OA}{AA_1} = \frac{AA_1 - OA_1}{AA_1} = 1 - \frac{OA_1}{AA_1}$ Kẻ $OR \perp BC$, $AS \perp BC$ $\Rightarrow \frac{OA_1}{AA_1} = \frac{OR}{AS} = \frac{OR \cdot BC}{AS \cdot BC} = \frac{2S_{OBC}}{2S_{ABC}} = \frac{S_{OBC}}{S_{ABC}}$ $\Rightarrow \frac{R_1 - OO_1}{AA_1} \leq 1 - \frac{OA_1}{AA_1} = 1 - \frac{S_{OBC}}{S_{ABC}}$ Tương tự, ta có: $\frac{R_1 - OO_1}{BB_1} \leq 1 - \frac{S_{OAC}}{S_{ABC}}$; $\frac{R_1 - OO_1}{CC_1} \leq 1 - \frac{S_{OAB}}{S_{ABC}}$ $\Rightarrow \frac{R_1 - OO_1}{AA_1} + \frac{R_1 - OO_1}{BB_1} + \frac{R_1 - OO_1}{CC_1} \leq 3 - \left(\frac{S_{OBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{OAC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{OAB}}{S_{ABC}} \right)$ $\Rightarrow \frac{R_1 - OO_1}{AA_1} + \frac{R_1 - OO_1}{BB_1} + \frac{R_1 - OO_1}{CC_1} \leq 3 - \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 3 - 1 = 2$ Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow O \equiv O_1 \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều (vô lí, vì $AB < AC$) Vậy $\frac{1}{AA_1} + \frac{1}{BB_1} + \frac{1}{CC_1} < \frac{2}{R_1 - OO_1}$ (đpcm).	
Câu 5 (1,0đ)	1)	$\begin{cases} (2x+4y-1)\sqrt{2x-y-1} = (4x-2y-3)\sqrt{x+2y} & (1) \\ x^2+8x+5-2(3y+2)\sqrt{4x-3y} = 2\sqrt{2x^2+5x+2} & (2) \end{cases}$ Đặt $u = \sqrt{2x-y-1}$, $v = \sqrt{x+2y}$ ($u, v \geq 0$). Phương trình (1) trở thành: $(2v^2-1)u = (2u^2-1)v$ $\Leftrightarrow 2uv^2 - u - 2u^2v + v = 0$ $\Leftrightarrow 2uv(v-u) + (v-u) = 0$ $\Leftrightarrow (v-u)(2uv+1) = 0$ $\Leftrightarrow v-u = 0 \text{ (do } u, v \geq 0 \Rightarrow 2uv+1 > 0)$ $\Leftrightarrow v = u$ $\Rightarrow \sqrt{x+2y} = \sqrt{2x-y-1}$ $\Leftrightarrow x+2y = 2x-y-1$ $\Leftrightarrow 3y = x-1$ Thay $3y = x-1$ vào phương trình (2) được: $x^2+8x+5-2(x+1)\sqrt{3x+1} = 2\sqrt{(x+2)(2x+1)} \left(\text{ĐK: } x \geq -\frac{1}{3} \right)$ $\Leftrightarrow (x^2+2x+1)+6x+4-2(x+1)\sqrt{3x+1} = 2\sqrt{(x+2)(2x+1)}$ $\Leftrightarrow \left[(x+1)^2+3x+1-2(x+1)\sqrt{3x+1} \right] + \left[x+2+2x+1-2\sqrt{(x+2)(2x+1)} \right] = 0$ $\Leftrightarrow \left(x+1-\sqrt{3x+1} \right)^2 + \left(\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1} \right)^2 = 0$ $\Leftrightarrow \left(x+1-\sqrt{3x+1} \right)^2 = \left(\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1} \right)^2 = 0$	0.5

	$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1-\sqrt{3x+1}=0 \\ \sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}=0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=\sqrt{3x+1} \\ \sqrt{x+2}=\sqrt{2x+1} \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x=0 \\ x+2=2x+1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow x=1 \text{ (TMĐK)}$ Với $x=1$ thì $y=0$ Thử lại thấy $(x,y)=(1;0)$ là nghiệm của hệ. Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x,y)=(1;0)$.	
2)	Sử dụng giả thiết $ab+2bc+2ca=7$ và áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có: $\begin{aligned} \sqrt{8a^2+56} &= 2\sqrt{2(a^2+7)} = 2\sqrt{2(a^2+ab+2bc+2ca)} \\ &= 2\sqrt{2(a+b)(a+2c)} \leq 2(a+b)+a+2c = 3a+2b+2c \end{aligned}$ Tương tự: $\sqrt{8b^2+56} \leq 3b+2a+2c$ $\begin{aligned} \sqrt{4c^2+7} &= \sqrt{4c^2+ab+2bc+2ca} = \sqrt{(2c+a)(2c+b)} \\ &\leq \frac{1}{2}(2c+a+2c+b) \end{aligned}$ Do đó: $\begin{aligned} &\sqrt{8a^2+56} + \sqrt{8b^2+56} + \sqrt{4c^2+7} \\ &\leq (3a+2b+2c) + (3b+2a+2c) + \frac{1}{2}(4c+a+b) \\ &= \frac{1}{2}(11a+11b+12c) \\ &\Rightarrow Q \geq \frac{11a+11b+12c}{\frac{1}{2}(11a+11b+12c)} = 2 \end{aligned}$ Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 2(a+b)=a+2c=b+2c \\ 2c+a=2c+b \\ ab+2bc+2ca=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=1 \\ c=\frac{3}{2} \end{cases}$ Vậy $\min Q=2$ khi $a=b=1, c=\frac{3}{2}$.	0.5