

**Bài I (2,0 điểm)**

1) Giải phương trình  $(\sqrt{x+5} - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x^2 + 5x}) = 5$ .

2) Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} x^2 + 7 = 4y^2 + 4y \\ x^2 + 3xy + 2y^2 + x + y = 0 \end{cases}$$

**Bài II (2,0 điểm)**

1) Cho biểu thức  $P = abc(a-1)(b+4)(c+6)$ , với  $a, b, c$  là các số nguyên thỏa mãn  $a + b + c = 2019$ . Chứng minh giá trị của biểu thức  $P$  chia hết cho 6.

2) Tìm tất cả số tự nhiên  $n$  để giá trị của biểu thức  $Q = \sqrt{n+2} + \sqrt{n+\sqrt{n+2}}$  là số nguyên.

**Bài III (2,0 điểm)**

Cho biểu thức  $K = ab + 4ac - 4bc$ , với  $a, b, c$  là các số thực không âm thỏa mãn  $a + b + 2c = 1$ .

1) Chứng minh  $K \geq -\frac{1}{2}$ .

2) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $K$ .

**Bài IV (3,0 điểm)**

Cho tam giác  $ABC$  có ba góc nhọn ( $AB < AC$ ), nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Gọi điểm  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ . Tia  $AI$  cắt đoạn thẳng  $BC$  tại điểm  $J$ , cắt đường tròn  $(O)$  tại điểm thứ hai  $M$  ( $M$  khác  $A$ ).

1) Chứng minh  $MI^2 = MJ \cdot MA$ .

2) Kẻ đường kính  $MN$  của đường tròn  $(O)$ . Đường thẳng  $AN$  cắt các tia phân giác trong của góc  $ABC$  và góc  $ACB$  lần lượt tại các điểm  $P$  và  $Q$ . Chứng minh  $N$  là trung điểm của đoạn thẳng  $PQ$ .

3) Lấy điểm  $E$  bất kỳ thuộc cung nhỏ  $MC$  của đường tròn  $(O)$  ( $E$  khác  $M$ ). Gọi  $F$  là điểm đối xứng với điểm  $I$  qua điểm  $E$ . Gọi  $R$  là giao điểm của hai đường thẳng  $PC$  và  $QB$ . Chứng minh bốn điểm  $P, Q, R, F$  cùng thuộc một đường tròn.

**Bài V (1,0 điểm)**

Mỗi điểm trong một mặt phẳng được tô bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ.

1) Chứng minh trong mặt phẳng đó tồn tại hai điểm được tô bởi cùng một màu và có khoảng cách bằng  $d$ .

2) Gọi tam giác có ba đỉnh được tô bởi cùng một màu là tam giác *đơn sắc*. Chứng minh trong mặt phẳng đó tồn tại hai tam giác *đơn sắc* là hai tam giác vuông và đồng dạng với nhau theo tỉ số  $k = \frac{1}{2019}$ .

Hết