

Câu 1. (2,0 điểm)

Cho biểu thức: $P = \left(\frac{2}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \cdot \frac{\sqrt{xy}(x+y) - xy}{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}$ (với $x > 0; y > 0$).

1. Rút gọn biểu thức P .
2. Biết $xy = 16$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P .

Câu 2. (1,0 điểm)

Hai lớp 9A và 9B của một trường quyền góp sách ủng hộ. Trung bình mỗi bạn lớp 9A ủng hộ 5 quyển, mỗi bạn lớp 9B ủng hộ 6 quyển nên cả hai lớp ủng hộ 493 quyển. Tính số học sinh mỗi lớp biết tổng số học sinh của hai lớp là 90.

Câu 3. (2,0 điểm)

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $(d_1): y = (m^2 + 1)x - 2m$ và $(d_2): y = (m + 3)x - m - 2$ (m là tham số).

1. Tìm m để (d_1) song song với (d_2) .
2. Chứng minh: với mọi m đường thẳng (d_2) luôn đi qua một điểm cố định.
3. Tìm m để $(d_1), (d_2)$ cắt nhau tại $M(x_M; y_M)$ thỏa mãn $A = 2020x_M(y_M + 2)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 4. (1,0 điểm)

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - y^3 + (x-1)y^2 - (y+1)x^2 = 0 \\ x^2 + 4\sqrt{y+4} = 2x + y + 7 \end{cases}$$

Câu 5. (3,5 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC$ nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R , vẽ AH vuông góc với BC tại H , vẽ đường kính AD cắt BC tại I , trên cạnh AC lấy điểm M sao cho IM song song với CD .

1. Chứng minh: Tứ giác $AHIM$ nội tiếp một đường tròn.
2. Chứng minh: $AB.AC = AH.AD$.
3. Chứng minh: HM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABH .
4. Chứng minh: $AB.CD + AC.BD < 4R^2$.

Câu 6. (0,5 điểm)

Xét các số thực $a; b; c$ ($a \neq 0$) sao cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm $m; n$ thỏa mãn: $0 \leq m \leq 1; 0 \leq n \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$Q = \frac{2a^2 - ac - 2ab + bc}{a^2 - ab + ac}$$

-----HẾT-----

Họ và tên thí sinhSố báo danh

(Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

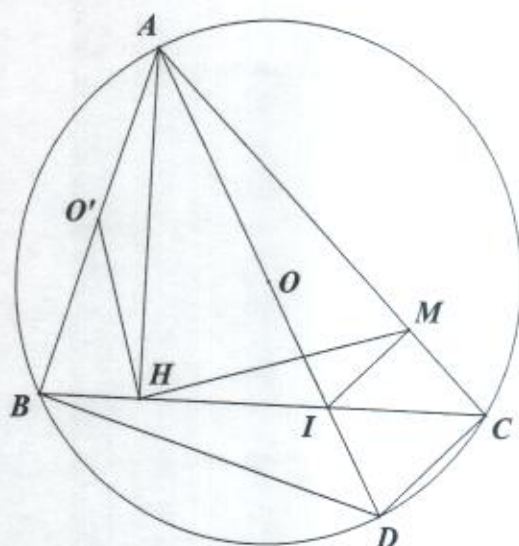
ĐÁP ÁN GỒM 05 TRANG

HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ BIỂU ĐIỂM MÔN: TOÁN
(Dành cho tất cả các thí sinh)

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
Câu 1 2,0 điểm		Cho biểu thức: $P = \left(\frac{2}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \cdot \frac{\sqrt{xy}(x+y) - xy}{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}}$ (với $x > 0; y > 0$). 1. Rút gọn biểu thức P . 2. Biết $xy = 16$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P .	
	1 1,5 điểm	$P = \frac{2\sqrt{xy} + x + y}{xy} \cdot \frac{\sqrt{xy}(x+y - \sqrt{xy})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x+y - \sqrt{xy})}$	0,5
		$= \frac{2\sqrt{xy} + x + y}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$	0,5
		$= \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{\sqrt{xy}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{xy}}$	0,5
	2 0,5 điểm	với $x > 0; y > 0; xy = 16$ ta có $P = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{4} \geq \frac{2\sqrt{\sqrt{x}\sqrt{y}}}{4} = \frac{\sqrt{\sqrt{xy}}}{2} = 1$	0,25
		Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 1 khi $x = y = 4$	0,25
Câu 2 1,0 điểm		Hai lớp 9A và 9B của một trường quyền góp sách ủng hộ. Trung bình mỗi bạn lớp 9A ủng hộ 5 quyển, mỗi bạn lớp 9B ủng hộ 6 quyển nên cả hai lớp ủng hộ 493 quyển. Tính số học sinh mỗi lớp biết tổng số học sinh của hai lớp là 90.	
		Gọi số học sinh lớp 9A là x ($0 < x < 90$) $\Rightarrow$ số học sinh lớp 9B là $90 - x$	0,25
		Theo bài ra ta có: $5x + 6.(90 - x) = 493 \Leftrightarrow x = 47$	0,5
		Kết luận: số học sinh lớp 9A là 47, số học sinh lớp 9B là 43	0,25

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
Câu 3 2,0 điểm		Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai đường thẳng $(d_1): y = (m^2 + 1)x - 2m$ và $(d_2): y = (m + 3)x - m - 2$ 1. Tìm m để (d_1) song song với (d_2) . 2. Chứng minh: với mọi m đường thẳng (d_2) luôn đi qua một điểm cố định. 3. Tìm m để $(d_1), (d_2)$ cắt nhau tại $M(x_M; y_M)$ thỏa mãn $A = 2020x_M(y_M + 2)$ đạt giá trị nhỏ nhất.	
	1 0,75 điểm	Điều kiện để $(d_1) \parallel (d_2)$ là $\begin{cases} m^2 + 1 = m + 3 \\ -2m \neq -m - 2 \end{cases}$	0,25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 = 0 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -1 \\ m \neq 2 \end{cases}$	0,25
		$\Leftrightarrow m = -1$	0,25
	2 0,5 điểm	Gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà đường thẳng (d_2) luôn đi qua $\forall m \in \mathbb{R} \Rightarrow y_0 = (m + 3)x_0 - m - 2$ đúng $\forall m \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow m(x_0 - 1) + 3x_0 - 2 - y_0 = 0$ đúng $\forall m \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 1 = 0 \\ 3x_0 - 2 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \end{cases}$ Vậy với mọi m đường thẳng (d_2) luôn đi qua $M(1; 1)$ cố định.	0,25
	3 0,75 điểm	Phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và (d_2) : $(m^2 + 1)x - 2m = (m + 3)x - m - 2 \Leftrightarrow (m + 1)(m - 2)x = m - 2$ Để $(d_1), (d_2)$ cắt nhau tại $M(x_M; y_M)$ thì $\begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq 2 \end{cases}$	0,25
		Khi đó $x_M = \frac{1}{m + 1} \Rightarrow y_M = (m + 3) \cdot \frac{1}{m + 1} - m - 2 = \frac{-m^2 - 2m + 1}{m + 1}$	0,25
		$A = 2020x_M(y_M + 2) = 2020 \cdot \frac{3 - m^2}{(m + 1)^2} = 1010 \cdot \frac{-2m^2 + 6}{(m + 1)^2}$ $= 1010 \cdot \frac{-2(m + 1)^2 + 4(m + 1) + 4}{(m + 1)^2}$ $= 1010 \cdot \left[-2 + \frac{4}{m + 1} + \frac{4}{(m + 1)^2} \right] = 1010 \cdot \left[\left(\frac{2}{m + 1} + 1 \right)^2 - 3 \right]$ ≥ -3030 Vậy A đạt giá trị nhỏ nhất bằng -3030 khi $m = -3$	0,25

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
Câu 4 1,0 điểm		Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - y^3 + (x-1)y^2 - (y+1)x^2 = 0 & (1) \\ x^2 + 4\sqrt{y+4} = 2x + y + 7 & (2) \end{cases}$	
		Điều kiện $y \geq -4$ Từ (1) $\Rightarrow (x^2 + y^2)(x - y - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$	0,25
		Trường hợp 1: $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$ thay vào hệ không thỏa mãn	0,25
		Trường hợp 1: $x - y - 1 = 0 \Rightarrow y = x - 1$ Thay vào (2) ta có: $x^2 + 4\sqrt{x+3} = 3x + 6 \quad (x \geq -3)$ $\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = x + 3 - 4\sqrt{x+3} + 4$ $\Leftrightarrow (x-1)^2 = (\sqrt{x+3} - 2)^2$	0,25
		$\Leftrightarrow (x-1)^2 = \frac{(x-1)^2}{(\sqrt{x+3} + 2)^2} \quad (\sqrt{x+3} + 2 > 0 \quad \forall x \geq -3)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ (\sqrt{x+3} + 2)^2 = 1 \text{ loại do } \sqrt{x+3} + 2 \geq 2 \end{cases}$ Vậy hệ có nghiệm $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$	0,25
Câu 5 3,5 điểm		Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC$ nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R , vẽ AH vuông góc với BC tại H , vẽ đường kính AD cắt BC tại I , trên cạnh AC lấy điểm M sao cho IM song song với CD . 1. Chứng minh: Tứ giác $AHIM$ nội tiếp một đường tròn. 2. Chứng minh: $AB.AC = AH.AD$. 3. Chứng minh: HM là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABH . 4. Chứng minh: $AB.CD + AC.BD < 4R^2$.	



1 1,0 điểm	Ta có $\widehat{ACD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)	0,25
	Vì $IM \parallel CD$ nên $\widehat{AMI} = \widehat{ACD} = 90^\circ$	0,25
	Nên $\widehat{AMI} + \widehat{AHI} = 180^\circ \Rightarrow$ tứ giác $AHIM$ nội tiếp	0,5
2 1,0 điểm	Xét hai tam giác AHB và ACD có $\widehat{AHB} = \widehat{ACD} = 90^\circ$ $\widehat{ABH} = \widehat{ADC}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn một cung) $\Rightarrow$ hai tam giác AHB và ACD đồng dạng	0,5
	$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{HA}{CA} \Rightarrow AB.AC = AH.AD$	0,5
3 1,0 điểm	Gọi đường tròn tâm O' ngoại tiếp tam giác ABH Vì tam giác ABH vuông nên O' là trung điểm AB	0,25
	Tam giác $AO'H$ cân tại O' nên $\widehat{O'HA} = \widehat{O'AH}$ (1)	0,25
	$\widehat{AHM} = \widehat{AIM}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn một cung) $\widehat{AIM} = \widehat{ADC}$ (đồng vị) $\widehat{ADC} = \widehat{ABH}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn một cung) Nên $\widehat{AHM} = \widehat{ABH}$ (2)	0,25
	Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{O'HA} + \widehat{AHM} = \widehat{O'AH} + \widehat{ABH} = 90^\circ$ $\Rightarrow MH \perp O'H \Rightarrow HM$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABH .	0,25
4 0,5 điểm	Ta có hai tam giác AHB và ACD đồng dạng $\Rightarrow AB.CD = BH.AD$ Chứng minh tương tự như trên ta có hai tam giác AHC và ABD đồng dạng $\Rightarrow AC.BD = AD.HC$	0,25
	$\Rightarrow AC.BD + AB.CD = AD.HC + BH.AD$ $= AD.(HC + HB) = AD.BC$	
	mà $BC < 2R; AD = 2R$ nên $\Rightarrow AC.BD + AB.CD < 4R^2$	0,25

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
Câu 6 0,5 điểm		Xét các số thực $a; b; c$ ($a \neq 0$) sao cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm $m; n$ thỏa mãn: $0 \leq m \leq 1; 0 \leq n \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q = \frac{2a^2 - ac - 2ab + bc}{a^2 - ab + ac}$	
		$ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm $m; n$ nên $\begin{cases} m + n = \frac{-b}{a} \\ m \cdot n = \frac{c}{a} \end{cases}$ $Q = \frac{2a^2 - ac - 2ab + bc}{a^2 - ab + ac} = \frac{(a-b)(2a-c)}{a^2 - ab + ac}$ $= \frac{\left(1 - \frac{b}{a}\right)\left(2 - \frac{c}{a}\right)}{1 - \frac{b}{a} + \frac{c}{a}} = \frac{(1+m+n)(2-mn)}{1+m+n+mn}$ Do $0 \leq m \leq 1; 0 \leq n \leq 1$ $\Rightarrow \begin{cases} mn \leq 1 \\ m(n-1) + n(m-1) + (mn-1) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mn \leq 1 \\ mn \leq \frac{1}{3}(1+m+n) \end{cases}$ $\Rightarrow Q \geq \frac{1+m+n}{1+m+n+\frac{1}{3}(1+m+n)} \Leftrightarrow Q \geq \frac{3}{4}$	0,25
		Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là $\frac{3}{4}$ khi $\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a = c \end{cases}$	0,25

HƯỚNG DẪN CHẤM CHUNG

* Trên đây chỉ là các bước giải và khung điểm bắt buộc cho từng bước, yêu cầu học sinh phải lập luận, biến đổi và trình bày hợp lý mới cho điểm.

* Phải có hình vẽ, không có hình vẽ thì không chấm điểm.

* Các bài làm theo các cách khác với đáp án mà đúng vẫn cho điểm tối đa theo biểu điểm.

* Điểm toàn bài là tổng điểm của từng phần và không làm tròn.

.....Hết.....