

Bài 1. (2 điểm) Cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (1) thỏa mãn các điều kiện:

$$a > 0 \text{ và } 2\sqrt{|ac|} < |b| < a + c.$$

a) Chứng minh rằng phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và

$$(1 - x_1)(1 - x_2) > 0 \text{ và } (1 + x_1)(1 + x_2) > 0.$$

b) Biết thêm rằng $a > c$. Chứng minh rằng $-1 < x_1, x_2 < 1$.

Bài 2. (1,5 điểm)

a) Tìm tất cả những số tự nhiên n sao cho $2^n + 1$ chia hết cho 9.

b) Cho n là số tự nhiên, $n > 3$. Chứng minh rằng $2^n + 1$ không chia hết cho $2^m - 1$ với mọi số tự nhiên m sao cho $2 < m \leq n$.

Bài 3. (2 điểm) Cho a và b là hai số thực phân biệt thỏa mãn điều kiện: $a^4 - 4a = b^4 - 4b$.

a) Chứng minh rằng $0 < a + b < 2$.

b) Biết rằng $a^4 - 4a = b^4 - 4b = k > 0$. Chứng minh rằng $-\sqrt{k} < ab < 0$.

Bài 4. (3 điểm) Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Gọi d_1, d_2 lần lượt là các đường phân giác trong và ngoài của góc $\widehat{BAC}$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của B lên d_1, d_2 . Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của C lên d_1, d_2 .

a) Chứng minh rằng MN và PQ lần lượt đi qua trung điểm của AB và AC.

b) Chứng minh rằng MN và PQ cắt nhau trên BC.

c) Trên d_1 lấy các điểm E và F sao cho $\widehat{ABE} = \widehat{BCA}$ và $\widehat{ACF} = \widehat{CBA}$ (E thuộc nửa mặt phẳng bờ AB chứa C; F thuộc nửa mặt phẳng bờ AC chứa B). Chứng minh rằng $\frac{BE}{CF} = \frac{AB}{AC}$.

d) Các đường thẳng BN và CQ lần lượt cắt AC và AB tại các điểm K và L. Chứng minh rằng các đường thẳng KE và LF cắt nhau trên đường thẳng BC.

Bài 5. (1,5 điểm) Trong một buổi gặp gỡ giao lưu giữa các học sinh đến từ n quốc gia, người ta nhận thấy rằng cứ 10 học sinh bất kỳ thì có ít nhất 3 học sinh đến từ cùng một quốc gia.

a) Gọi k là số các quốc gia có đúng 1 học sinh tham dự buổi gặp gỡ. Chứng minh rằng $n < \frac{k+10}{2}$.

b) Biết rằng số các học sinh tham dự buổi gặp gỡ là 60. Chứng minh rằng có thể tìm được ít nhất là 15 học sinh đến từ cùng một quốc gia.