SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÁI BÌNH

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN THÁI BÌNH
NĂM HỌC 2019-2020
MÔN THI : TOÁN
(Dành cho thí sinh thi chuyên Toán, Tin)
Thời gian làm bài: ***150 phút*** *(Không kể thời gian giao đề)*

Câu 1. *(2,0 điểm)*

Cho các số thực a,b khác 0 thỏa mãn: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$

1. Tính giá trị của biểu thức $A=\frac{\left(a^2-b^2\right)^2}{a^4b^4}+\frac{4}{ab}$.
2. Chứng minh rằng: $(a+b-2)^3-(a-1)^3-(b-1)^3-3(a+b)+6=0$.

Câu 2. *(2,0 điểm)*

1. Giải phương trình: $\sqrt{x+2}-2\sqrt{x-1}=3x-3.\sqrt{(x+2)(x-1)}$
2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y+2.\sqrt{x^2+y}=4x+3 \\ (x-3)\sqrt{y+4}+(y-4)\sqrt{x-1}+2=0 \end{cases}$

Câu 3. *(3,5 điểm)*

Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R. Trên cung nhỏ AD lấy điểm E bất kì (E không trùng với A và D). Tia EB cắt các đường thẳng AD, AC lần lượt tại I và K. Tia EC cắt các đường thẳng DA, DB lần lượt tại M và N. Hai đường thẳng AN, DK cắt nhau tại P.

1. Chứng minh: Tứ giác $EPND$ nội tiếp một đường tròn.
2. Chứng minh: $\widehat{EKM}=\widehat{DKM}$.
3. Khi M là trung điểm của AD, tính độ dài đoạn thẳng AE theo R.

Câu 4. *(1,0 điểm)*

Tìm các nghiệm nguyên $(x;y)$ của phương trình $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2020}$.

Câu 5. *(1,5 điểm)*

1. Cho các số thực a,b,c thỏa mãn: $\begin{cases} 0<a,b,c<\frac{1}{2} \\ 2a+3b+4c=3 \end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{2}{a(3b+4c-2)}+\frac{9}{b(4a+8c-3)}+\frac{8}{c(2a+3b-1)}$

2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm $M(a;b)$ được gọi là điểm nguyên nếu cả a và b đều là số nguyên. Chứng minh rằng tồn tại điểm I trong mặt phẳng tọa độ và 2019 số thực dương $R_1;R_2;...R_{2019}$ sao cho có đúng k điểm nguyên nằm trong đường tròn $(I;R_k)$ với mọi k là số nguyên dương không vượt quá 2019.

-------------**HẾT**-------------

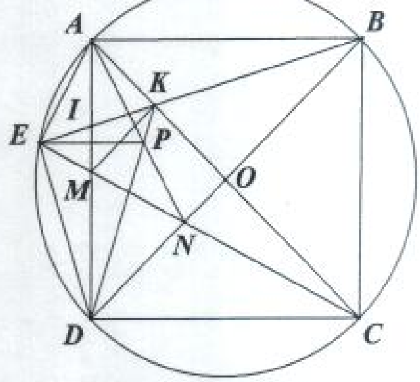
Họ và tên thí sinh ....**Số báo danh** ....

(Giám thị không giải thích gì thêm)

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THÁI BÌNH ĐÁP ÁN GỒM 06 TRANG	KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN THÁI BÌNH NĂM HỌC: 2019-2020 HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ BIỂU ĐIỂM MÔN: TOÁN CHUYÊN (Dành cho thí sinh thi chuyên Toán, Tin)

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
Câu 1 *2,0 điểm)*		Cho các số thực a,b khác 0 thỏa mãn: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ 1. Tính giá trị của biểu thức $A=\frac{\left(a^2-b^2\right)^2}{a^4b^4}+\frac{4}{ab}$. 2. Chứng minh rằng: $(a+b-2)^3-(a-1)^3-(b-1)^3-3(a+b)+6=0.$	
	1 *1,0 điểm*	$A=\left(\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}\right)^2+\frac{4}{ab}=\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)^2+\frac{4}{ab}$	0,25
		$A=\left[\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right]^2+\frac{4}{ab}$	0,25
		$A=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+\frac{4}{ab}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2=1$	0,5
	2 *1,0 điểm*	Từ giả thiết: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1\Rightarrow a+b=ab$ $\Rightarrow ab-a-b+1=1\Leftrightarrow(a-1)(b-1)=1$	0,25
		Áp dụng hằng đẳng thức $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$ $\left[(a-1)+(b-1)\right]^3$ $=(a-1)^3+(b-1)^3+3(a-1)(b-1)\left[(a-1)+(b-1)\right]$	0,25
		$\Rightarrow(a+b-2)^3=(a-1)^3+(b-1)^3+3[a+b-2]$	0,25
		$\Leftrightarrow(a+b-2)^3-(a-1)^3-(b-1)^3-3(a+b)+6=0$	0,25
Câu 2 *2,0 điểm*		1. Giải phương trình: $\sqrt{x+2}-2\sqrt{x-1}=3x-3.\sqrt{(x+2)(x-1)}$ 2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}y+2.\sqrt{x^2+y}=4x+3\\(x-3)\sqrt{y+4}+(y-4)\sqrt{x-1}+2=0\end{cases}$	

	1 *1,0 điểm*	1. Giải phương trình: $\sqrt{x+2}-2\sqrt{x-1}=3x-3.\sqrt{(x+2)(x-1)}$	
		Điều kiện: $x\geq 1$ $\sqrt{x+2}-2\sqrt{x-1}=3x-3.\sqrt{(x+2)(x-1)}$ $\Leftrightarrow \sqrt{x+2}-2\sqrt{x-1}=(x+2)+2(x-1)-3.\sqrt{(x+2)(x-1)}$ Đặt $a=\sqrt{x+2};b=\sqrt{x-1}(a;b\geq 0)$ Ta được phương trình: $a-2b=a^2+2b^2-3ab$ $\Leftrightarrow (a-2b)(a-b-1)=0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2b \\ a=b+1 \end{array}\right.$	0,5
		Với $a=2b\Rightarrow \sqrt{x+2}=2\sqrt{x-1}\Leftrightarrow x=2$	0,25
		Với $a=b+1$ $\Rightarrow \sqrt{x+2}=\sqrt{x-1}+1\Leftrightarrow x+2=x+2\sqrt{x-1}\Leftrightarrow x=2$ Vậy phương trình có nghiệm là $x=2$	0,25
	2 *1,0 điểm*	2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y+2.\sqrt{x^2+y}=4x+3(1) \\ (x-3)\sqrt{y+4}+(y-4)\sqrt{x-1}+2=0(2) \end{cases}$ Điều kiện: $x\geq 1;y\geq -4;x^2+y\geq 0$ Biến đổi phương trình (1): $(1)\Leftrightarrow x^2+y+2.\sqrt{x^2+y}+1=x^2+4x+4$ $\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+y}+1\right)^2=(x+2)^2$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+y}=x+1 \\ \sqrt{x^2+y}=-x-3(\text{loại do x}\geq 1) \end{array}\right.$	0,25
		Với $\sqrt{x^2+y}=x+1\Leftrightarrow y=2x+1$ thay vào (2) ta được: $(x-3)\sqrt{2x+5}+(2x-3)\sqrt{x-1}+2=0$ $\Leftrightarrow (x-3)\left(\sqrt{2x+5}-3\right)+(2x-3)\left(\sqrt{x-1}-1\right)+5x-10=0$ $\Leftrightarrow \frac{(x-3)(2x-4)}{\sqrt{2x+5}+3}+\frac{(2x-3)(x-2)}{\sqrt{x-1}+1}+5(x-2)=0$ $\Leftrightarrow (x-2)\left[\frac{2x-6}{\sqrt{2x+5}+3}+\frac{2x-3}{\sqrt{x-1}+1}+5\right]=0$	

		$\Leftrightarrow (x-2)\left[\dfrac{2x-6}{\sqrt{2x+5}+3}+2+\dfrac{2x-3}{\sqrt{x-1}+1}+3\right]=0$ $\Leftrightarrow (x-2)\left[\dfrac{2x+2\sqrt{2x+5}}{\sqrt{2x+5}+3}+\dfrac{2x+3\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+1}\right]=0$ $\Leftrightarrow x=2$ Do $\dfrac{2x+2\sqrt{2x+5}}{\sqrt{2x+5}+3}+\dfrac{2x+3\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+1}>0, \forall x\geq 1$	0,5
		Vậy hệ phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$	0,25
Câu 3 *3,5 điểm*		Cho hình vuông *ABCD* nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R. Trên cung nhỏ *AD* lấy điểm *E* bất kì (*E* không trùng với *A* và *D*). Tia *EB* cắt các đường thẳng *AD, AC* lần lượt tại *I* và *K*. Tia *EC* cắt các đường thẳng *DA*, *DB* lần lượt tại *M* và *N*. Hai đường thẳng *AN*, *DK* cắt nhau tại *P*. 1. Chứng minh: Tứ giác *EPND* nội tiếp một đường tròn. 2. Chứng minh: $\widehat{EKM}=\widehat{DKM}$. 3. Khi *M* là trung điểm của *AD*, tính độ dài đoạn thẳng *AE* theo *R*.	
			
	1 *1,0 điểm*	Ta có: $\widehat{PNE}=\widehat{NAC}+\widehat{NCA}=2\widehat{NCA}=sđ\,\overset{\frown}{EA}$	0,25
		Chứng minh $\widehat{PDA}=\widehat{ABE}$	0,25
		Suy ra $\widehat{PDE}=\widehat{PDA}+\widehat{ADE}=\widehat{ABE}+\widehat{ADE}=2\widehat{ABE}=sđ\,\overset{\frown}{EA}$	0,25
		Xét tứ giác $EPND$ có: $\widehat{PNE}=\widehat{PDE}$ và hai đỉnh $N;D$ là hai đỉnh liên tiếp nên $EPND$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.	0,25
	2 *1,0 điểm*	Ta thấy tứ giác $AKME$ là tứ giác nội tiếp do $\widehat{MEK}=\widehat{MAK}=45^0$	0,25
		Suy ra $\widehat{MEA}=\widehat{MKA}=90^0$	0,25
		Do đó $MK\,//\,BD \Rightarrow \widehat{MKD}=\widehat{KDB}=\widehat{KBD}=\widehat{EKM}$	0,5
	3 *1,5 điểm*	Chứng minh ΔMDC đồng dạng ΔMEA (g.g)	0,25
		Suy ra $\dfrac{MD}{MC}=\dfrac{ME}{MA}\Rightarrow MC.ME=MD.MA=MD^2=\dfrac{CD^2}{4}$	0,25

Mặt khác ta có: $MC^2 = CD^2 + MD^2 = CD^2 + \frac{CD^2}{4} = \frac{5CD^2}{4}$

Suy ra: $MC = \frac{\sqrt{5}CD}{2} \Rightarrow ME = \frac{\sqrt{5}CD}{10}$ — 0,5

Mà $\frac{EA}{CD} = \frac{AM}{MC} \Rightarrow EA = \frac{AM.CD}{MC} = \frac{\sqrt{5}}{5}CD = \frac{\sqrt{10}}{5}R$ — 0,5

Câu 4 *1,0 điểm*

Tìm các nghiệm nguyên $(x;y)$ của phương trình

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2020}\ (1).$$

Điều kiện: $x \ge 0; y \ge 0$

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{2020} - \sqrt{y} \Leftrightarrow x = 2020 + y - 2\sqrt{2020y}$

$\Leftrightarrow x = 2020 + y - 4\sqrt{5.101y}$ — 0,25

Do $x;y$ nguyên nên $\sqrt{5.101y}$ nguyên hay $5.101y$ là số chính phương.

Suy ra: $5.101y = k^2 \Rightarrow y = 5.101.a^2 = 505a^2$ (a là số nguyên)

Tương tự $x = 5.101.b^2 = 505b^2$ (b là số nguyên)

Thay $x;y$ theo $a;b$ vào (1) ta được:

$|a|\sqrt{505} + |b|\sqrt{505} = 2\sqrt{505} \Leftrightarrow |a| + |b| = 2$

$\lvert a\rvert$	$\lvert b\rvert$	$x = 505b^2$	$y = 505a^2$
0	2	2020	0
1	1	505	505
2	0	0	2020

— 0,5

Vậy phương trình có các nghiệm là:

$(2020;0);(505;505);(0;2020)$ — 0,25

Câu 5 *1,5 điểm*

1. Cho các số thực a,b,c thỏa mãn: $\begin{cases} 0 < a,b,c < \frac{1}{2} \\ 2a + 3b + 4c = 3 \end{cases}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{2}{a(3b+4c-2)} + \frac{9}{b(4a+8c-3)} + \frac{8}{c(2a+3b-1)}$$

2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, điểm $M(a;b)$ được gọi là điểm nguyên nếu cả a và b đều là số nguyên. Chứng minh rằng tồn tại điểm I trong mặt phẳng tọa độ và 2019 số thực dương $R_1;R_2;...R_{2019}$ sao cho có đúng k điểm nguyên nằm trong đường tròn $(I;R_k)$ với mọi k là số nguyên dương không vượt quá 2019

	1. *1,0 điểm*	Cho các số thực a,b,c thỏa mãn: $\begin{cases}0<a,b,c<\dfrac{1}{2}\\ 2a+3b+4c=3\end{cases}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $$P=\frac{2}{a(3b+4c-2)}+\frac{9}{b(4a+8c-3)}+\frac{8}{c(2a+3b-1)}$$	
		Ta có: $P=\dfrac{2}{a(1-2a)}+\dfrac{3}{b(1-2b)}+\dfrac{4}{c(1-2c)}$ $=\dfrac{2a}{a^2(1-2a)}+\dfrac{3b}{b^2(1-2b)}+\dfrac{4c}{c^2(1-2c)}$	0,25
		Áp dụng bất đẳng thức AG-GM, ta có: $a^2(1-2a)\le\left[\dfrac{a+a+1-2a}{3}\right]^3=\dfrac{1}{27}$ Tương tự $b^2(1-2b)\le\dfrac{1}{27};c^2(1-2c)\le\dfrac{1}{27}$	0,25
		Suy ra $P\ge 27(2a+3b+4c)=81$	0,25
		Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 81	0,25
	2. *0,5 điểm*	Xét điểm $I\left(\sqrt{2};\sqrt{3}\right)$. Ta chứng minh khoảng cách từ I đến hai điểm nguyên khác nhau là khác nhau. Xét hai điểm nguyên $M(a;b);M'(a';b')$ $IM=IM'\Leftrightarrow IM^2=IM'^2$ $\Leftrightarrow\left(a-\sqrt{2}\right)^2+\left(b-\sqrt{3}\right)^2=\left(a'-\sqrt{2}\right)^2+\left(b'-\sqrt{3}\right)^2$ $\Leftrightarrow a^2+b^2-a'^2-b'^2+2(a'-a)\sqrt{2}+2(b'-b)\sqrt{3}=0$ Nhận xét nếu các số nguyên $m;n;p$ thỏa mãn: $m+n\sqrt{2}+p\sqrt{3}=0$ thì: $m=n=p=0$ $\begin{cases}\sqrt{2};\sqrt{3};\sqrt{6}\notin Q;m,n,p\in Q\\ 2mn\sqrt{2}=3p^2-m^2-2n^2\\ 2mp\sqrt{3}=2n^2-m^2-3p^2\\ 2pn\sqrt{6}=m^2-2n^2-3p^2\\ m+n\sqrt{2}+p\sqrt{3}=0\end{cases}$	

		$\Rightarrow \begin{cases} mn = np = pm = 0 \\ m + n\sqrt{2} + p\sqrt{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow m = n = p = 0$ Ta có: $IM = IM' \Leftrightarrow IM^2 = IM'^2$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - a'^2 - b'^2 = 0 \\ 2(a' - a) = 0 \\ 2(b' - b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = b' \\ a = a' \end{cases} \Leftrightarrow M \equiv M'$	0,25
		Xét tất cả các khoảng cách từ các điểm nguyên đến I, các khoảng cách này đôi một phân biệt. Gọi S là tập hợp các số thực bằng các khoảng cách từ tất cả các điểm nguyên đến I. Ta có thể chọn được 2020 số dương nhỏ nhất thuộc S và được sắp theo thứ tự tăng dần, nghĩa là tồn tại các số dương $s_1; s_2; ... s_{2020}$ thuộc tập S thoả mãn $s_p < s_q$ nếu $p < q$, các số thuộc $S \setminus \{s_1; s_2; ... s_{2020}\}$ đều lớn hơn $s_1; s_2; ... s_{2020}$. Đặt $R_k = \dfrac{s_k + s_{k+1}}{2}, k = 1; 2; 3; ... 2019$. Ta có điều phải chứng minh.	0,25

HƯỚNG DẪN CHẤM

** Trên đây chỉ là các bước giải và khung điểm bắt buộc cho từng bước ,yêu cầu học sinh phải lập luận ,biến đổi và trình bày hợp lý mới cho điểm.*

** Phải có hình vẽ ,không có hình vẽ thì không chấm điểm.*

** Các bài làm theo các cách khác với đáp án mà đúng vẫn cho điểm tối đa theo biểu điểm.*

** Điểm toàn bài là tổng điểm của từng phần và không làm tròn.*

………………..Hết……………………