

ĐỀ CHÍNH THỨC

Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian giao đề)

I. TRẮC NGHIỆM (3,0 điểm) Chọn phương án trả lời đúng trong các câu sau:

Câu 1: Khi $x = 7$ biểu thức $\frac{4}{\sqrt{x+2}-1}$ có giá trị là

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{4}{\sqrt{8}}$. C. $\frac{4}{3}$. D. 2.

Câu 2: Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = 1 - x$. B. $y = 2x - 3$. C. $y = (1 - \sqrt{2})x$. D. $y = -2x + 6$.

Câu 3: Số nghiệm của phương trình $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 4: Cho hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$). Điểm $M(1;2)$ thuộc đồ thị hàm số khi

- A. $a = 2$. B. $a = \frac{1}{2}$. C. $a = -2$. D. $a = \frac{1}{4}$.

Câu 5: Từ điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến AB, AC tới đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Kẻ đường kính BK . Biết $\widehat{BAC} = 30^\circ$, số đo của cung nhỏ CK là

- A. 30° . B. 60° . C. 120° . D. 150° .

Câu 6: Cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi H là chân đường cao hạ từ đỉnh A xuống cạnh BC . Biết $AH = \sqrt{12}cm$, $\frac{HB}{HC} = \frac{1}{3}$. Độ dài đoạn BC là

- A. $6cm$. B. $8cm$. C. $4\sqrt{3}cm$. D. $12cm$.

II. TỰ LUẬN (7,0 điểm)

Câu 7: Cho biểu thức $A = \frac{(\sqrt{x}+1)^2 + (\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{3\sqrt{x}+1}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm x là số chính phương để $2019A$ là số nguyên.

Câu 8: An đếm số bài kiểm tra một tiết đạt điểm 9 và điểm 10 của mình thấy nhiều hơn 16 bài. Tổng số điểm của tất cả các bài kiểm tra đạt điểm 9 và điểm 10 đó là 160. Hỏi An được bao nhiêu bài điểm 9 và bao nhiêu bài điểm 10?

Câu 9: Cho đường tròn (O) , hai điểm A, B nằm trên (O) sao cho $\widehat{AOB} = 90^\circ$. Điểm C nằm trên cung lớn AB sao cho $AC > BC$ và tam giác ABC có ba góc đều nhọn. Các đường cao AI, BK của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H . BK cắt (O) tại điểm N (khác điểm B); AI cắt (O) tại điểm M (khác điểm A); NA cắt MB tại điểm D . Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $CIHK$ nội tiếp một đường tròn.

b) MN là đường kính của đường tròn (O) .

c) OC song song với DH .

Câu 10: a) Cho phương trình $x^2 - 2mx - 2m - 1 = 0$ (1) với m là tham số. Tìm m để phương trình (1) có

hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $\sqrt{x_1 + x_2} + \sqrt{3 + x_1 x_2} = 2m + 1$.

b) Cho hai số thực không âm a, b thỏa mãn $a^2 + b^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \frac{a^3 + b^3 + 4}{ab + 1}.$$

-----Hết-----

BẢNG ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6
D	B	D	A	A	B

I. TRẮC NGHIỆM (3,0 điểm) Chọn phương án trả lời đúng trong các câu sau:

Câu 1: Khi $x = 7$ biểu thức $\frac{4}{\sqrt{x+2}-1}$ có giá trị là

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{4}{\sqrt{8}}$. C. $\frac{4}{3}$. D. 2.

Lời giải

Chọn: D

Thay $x = 7$ (thỏa mãn) vào biểu thức $\frac{4}{\sqrt{x+2}-1}$ ta tính được biểu thức có giá trị bằng

$$\frac{4}{\sqrt{7+2}-1} = \frac{4}{3-1} = 2.$$

Câu 2: Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = 1 - x$. B. $y = 2x - 3$. C. $y = (1 - \sqrt{2})x$. D. $y = -2x + 6$.

Lời giải

Chọn: B

Hàm số $y = 2x - 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 3: Số nghiệm của phương trình $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn: D

Đặt $t = x^2 (t \geq 0)$. Khi đó phương trình tương đương $t^2 - 3t + 2 = 0$.

Ta thấy $1 - 3 + 2 = 0$. Nên phương trình có hai nghiệm $t = 1$ (thỏa mãn); $t = 2$ (thỏa mãn).

$$\text{Khi đó } \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm \sqrt{2} \end{cases}$$

Câu 4: Cho hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$. Điểm $M(1;2)$ thuộc đồ thị hàm số khi

- A. $a = 2$. B. $a = \frac{1}{2}$. C. $a = -2$. D. $a = \frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn A.

Vì $M(1;2)$ thuộc đồ thị hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$ nên ta có

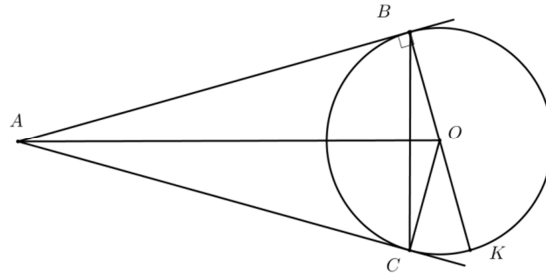
$$2 = a.1^2 \Leftrightarrow a = 2 \text{ (thỏa mãn).}$$

Câu 5: Từ điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến AB, AC tới đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Kẻ đường kính BK . Biết $\widehat{BAC} = 30^\circ$, số đo của cung nhỏ CK là

A. 30° . B. 60° . C. 120° . D. 150° .

Lời giải

Chọn: A.



Từ giả thiết ta suy ra tứ giác $ABOC$ nội tiếp nên $\widehat{BAC} = \widehat{COK} = 30^\circ$, mà $\widehat{COK} = \text{sđ } \widehat{CK}$ nên Số đo cung nhỏ CK là 30° .

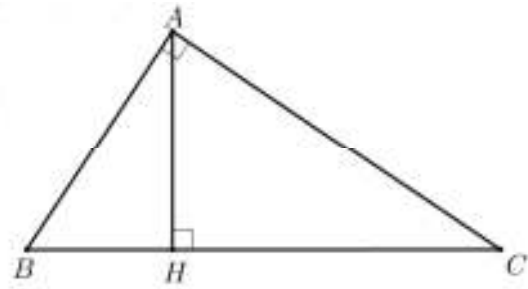
Câu 6: Cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi H là chân đường cao hạ từ đỉnh A xuống cạnh BC . Biết $AH = \sqrt{12} \text{ cm}$, $\frac{HB}{HC} = \frac{1}{3}$. Độ dài đoạn BC là

A. 6 cm. B. 8 cm. C. $4\sqrt{3}$ cm. D. 12 cm.

Lời giải

Chọn: B

Theo đề bài ta có: $\frac{HB}{HC} = \frac{1}{3} \Rightarrow HC = 3HB$. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH ta có $AH^2 = BH \cdot HC \Leftrightarrow 12 = BH \cdot 3BH$
 $\Leftrightarrow BH^2 = 4 \Leftrightarrow BH = 2$
 $\Rightarrow HC = 3 \cdot HB = 3 \cdot 2 = 6$
 $\Rightarrow BC = HB + HC = 2 + 6 = 8 \text{ (cm)}$



II. TỰ LUẬN (7,0 điểm)

Câu 7: Cho biểu thức $A = \frac{(\sqrt{x} + 1)^2 + (\sqrt{x} - 1)^2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} - \frac{3\sqrt{x} + 1}{x - 1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm x là số chính phương để $2019A$ là số nguyên.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{(\sqrt{x} + 1)^2 + (\sqrt{x} - 1)^2 - 3\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{x + 2\sqrt{x} + 1 + x - 2\sqrt{x} + 1 - 3\sqrt{x} - 1}{x - 1} \\ &= \frac{2x - 3\sqrt{x} + 1}{x - 1} = \frac{2x - 2\sqrt{x} - \sqrt{x} + 1}{x - 1} = \frac{(\sqrt{x} - 1)(2\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} \\ 2019A &= \frac{2019(2\sqrt{x} + 2 - 3)}{\sqrt{x} + 1} = 4038 - \frac{6057}{\sqrt{x} + 1} \end{aligned}$$

b)

$2019A$ là số nguyên khi và chỉ khi $\sqrt{x} + 1$ là ước nguyên dương của 6057 gồm: 1; 3; 9; 673; 2019; 6057.

+) $\sqrt{x} + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$, thỏa mãn.

- +) $\sqrt{x} + 1 = 3 \Leftrightarrow x = 4$, thỏa mãn.
 +) $\sqrt{x} + 1 = 9 \Leftrightarrow x = 64$, thỏa mãn.
 +) $\sqrt{x} + 1 = 673 \Leftrightarrow x = 451584$, thỏa mãn.
 +) $\sqrt{x} + 1 = 2019 \Leftrightarrow x = 4072324$, thỏa mãn.
 +) $\sqrt{x} + 1 = 6057 \Leftrightarrow x = 36675136$, thỏa mãn.

Câu 8: An đếm số bài kiểm tra một tiết đạt điểm 9 và điểm 10 của mình thấy nhiều hơn 16 bài. Tổng số điểm của tất cả các bài kiểm tra đạt điểm 9 và điểm 10 đó là 160. Hỏi An được bao nhiêu bài điểm 9 và bao nhiêu bài điểm 10?

Lời giải

Gọi số bài điểm 9 và điểm 10 của An đạt được lần lượt là x, y (bài) ($x, y \in \mathbb{N}$).

Theo giả thiết $x + y > 16$.

Vì tổng số điểm của tất cả các bài kiểm tra đó là 160 nên $9x + 10y = 160$.

$$\text{Ta có } 160 = 9x + 10y \geq 9(x + y) \Rightarrow x + y \leq \frac{160}{9}.$$

Do $x + y \in \mathbb{N}$ và $16 < x + y \leq \frac{160}{9}$ nên $x + y = 17$.

$$\text{Ta có hệ } \begin{cases} x + y = 17 \\ 9x + 10y = 160 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 17 - y \\ 9(17 - y) + 10y = 160 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 7 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy An được 10 bài điểm 9 và 7 bài điểm 10.

Câu 9: Cho đường tròn (O) , hai điểm A, B nằm trên (O) sao cho $\widehat{AOB} = 90^\circ$. Điểm C nằm trên cung lớn AB sao cho $AC > BC$ và tam giác ABC có ba góc đều nhọn. Các đường cao AI, BK của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H . BK cắt (O) tại điểm N (khác điểm B); AI cắt (O) tại điểm M (khác điểm A); NA cắt MB tại điểm D . Chứng minh rằng:

- Tứ giác $CIHK$ nội tiếp một đường tròn.
- MN là đường kính của đường tròn (O) .
- OC song song với DH .

Lời giải

a) Ta có

$$\begin{cases} HK \perp KC \\ HI \perp IC \end{cases} \Rightarrow \widehat{HKC} + \widehat{HIC} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ.$$

Do đó, $CIHK$ là tứ giác nội tiếp.

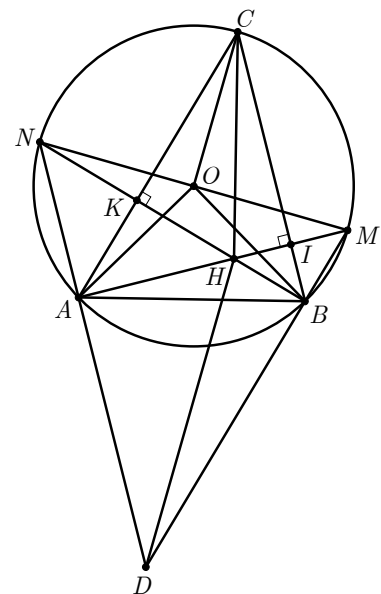
b) Do tứ giác $CIHK$ nội tiếp nên

$$45^\circ = \widehat{ICK} = \widehat{BHI} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{BM} + \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{AN}.$$

$$\Rightarrow \text{sđ} \widehat{BM} + \text{sđ} \widehat{AN} = 90^\circ.$$

$$\text{Suy ra, } \text{sđ} \widehat{MN} = \text{sđ} \widehat{AB} + (\text{sđ} \widehat{BM} + \text{sđ} \widehat{AN}) \text{ hay} \\ = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

MN là đường kính của (O) .



c) Do MN là đường kính của (O) nên $MA \perp DN, NB \perp DM$. Do đó, H là trực tâm tam giác DMN hay $DH \perp MN$.

Do I, K cùng nhìn AB dưới góc 90° nên tứ giác $ABIK$ nội tiếp.

Suy ra, $\widehat{CAI} = \widehat{CBK} \Rightarrow \text{sđ}\widehat{CM} = \text{sđ}\widehat{CN} \Rightarrow C$ là điểm chính giữa của cung $MN \Rightarrow CO \perp MN$.

Vì $AC > BC$ nên $\triangle ABC$ không cân tại C do đó C, O, H không thẳng hàng. Từ đó suy ra $CO \parallel DH$.

Câu 10: a) Cho phương trình $x^2 - 2mx - 2m - 1 = 0$ (1) với m là tham số. Tìm m để phương trình (1) có

hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $\sqrt{x_1 + x_2} + \sqrt{3 + x_1 x_2} = 2m + 1$.

b) Cho hai số thực không âm a, b thỏa mãn $a^2 + b^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \frac{a^3 + b^3 + 4}{ab + 1}.$$

Lời giải

a) $\Delta' = m^2 + 2m + 1 = (m + 1)^2$.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m \neq -1$.

Áp dụng ĐL Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = 2m; x_1 x_2 = -2m - 1$.

Ta có $\sqrt{2m} + \sqrt{2 - 2m} = 2m + 1$ (ĐK $0 \leq m \leq 1$ (*))

$$\Leftrightarrow \sqrt{2m} - 1 + \sqrt{2 - 2m} - 1 - (2m - 1) = 0 \Leftrightarrow \frac{2m - 1}{\sqrt{2m} + 1} - \frac{2m - 1}{\sqrt{2 - 2m} + 1} - (2m - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2m - 1) \left(\frac{1}{\sqrt{2m} + 1} - \frac{1}{\sqrt{2 - 2m} + 1} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \quad (t / m^{(*)}) \\ \frac{1}{\sqrt{2m} + 1} - \frac{1}{\sqrt{2 - 2m} + 1} - 1 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Vì $\sqrt{2m} + 1 \geq 1, \forall m$ thỏa mãn $0 \leq m \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2m} + 1} \leq 1$. Do đó, $VT(2) < 0 = VP(2)$ hay (2) vô nghiệm.

Vậy giá trị cần tìm là $m = \frac{1}{2}$.

b) Ta có $a^3 + b^3 + 4 = (a^3 + b^3 + 1) + 3 \geq 3ab + 3$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$.

Vì $ab + 1 > 0$ nên $M = \frac{a^3 + b^3 + 4}{ab + 1} \geq \frac{3(ab + 1)}{ab + 1} = 3$.

Do đó, giá trị nhỏ nhất của biểu thức M là 3 đạt được khi $a = b = 1$.

+) Vì $a^2 + b^2 = 2$ nên $\boxed{\hspace{2cm}}$ Suy ra $a^3 + b^3 + 4 \leq \sqrt{2}(a^2 + b^2) + 4 = 2\sqrt{2} + 4$.

Mặt khác $\frac{1}{ab + 1} \leq 1$ do $ab + 1 \geq 1$. Suy ra $M = \frac{a^3 + b^3 + 4}{ab + 1} \leq 2\sqrt{2} + 4$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 2 \\ ab = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (a; b) = (0; \sqrt{2}) \vee (a; b) = (\sqrt{2}; 0).$$

Giá trị lớn nhất của biểu thức M là $4 + 2\sqrt{2}$ đạt được khi $(a; b) = (0; \sqrt{2}) \vee (a; b) = (\sqrt{2}; 0)$

----- HẾT -----