

Câu 1. (2,0 điểm).

a) Rút gọn biểu thức $T = \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}+1} + \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-1} - 1 \right) : \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}+1} - \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-1} + 1 \right)$

b) Cho $x + \sqrt{3} = 2$. Tính giá trị của biểu thức: $H = x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 20x + 2023$

Câu 2. (1,0 điểm). Cho Parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y = (m+1)x - m^2 - \frac{1}{2}$ (m là tham số).

Với giá trị nào của m thì đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ sao cho biểu thức $T = y_1 + y_2 - x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 3. (2,0 điểm).

a) Giải phương trình: $\sqrt{x+1} + \sqrt{6x-14} = x^2 - 5$

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x^2+1)(y^2+1) = 10 \\ (x+y)(xy-1) = 3 \end{cases}$$

Câu 4. (3,0 điểm). Cho đường tròn $(O; R)$ có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Trên dây BC

lấy điểm M (M khác B và C). Trên dây BD lấy điểm N sao cho $\widehat{MAN} = \frac{1}{2}\widehat{CAD}$; AN cắt CD tại K .

Từ M kẻ $MH \perp AB$ ($H \in AB$).

a) Chứng minh tứ giác $ACMH$ và tứ giác $ACMK$ nội tiếp.

b) Tia AM cắt đường tròn (O) tại E (E khác A). Tiếp tuyến tại E và B của đường tròn (O) cắt nhau tại F .

Chứng minh rằng AF đi qua trung điểm của HM .

c) Chứng minh MN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định khi M di chuyển trên dây BC (M khác B và C).

Câu 5. (1,0 điểm).

a) Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $16p+1$ là lập phương của số nguyên dương.

b) Tìm tất cả các bộ số nguyên (a, b) thỏa mãn $3(a^2 + b^2) - 7(a + b) = -4$

Câu 6. (1,0 điểm).

a) Cho x, y là hai số dương. Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} \geq x + y$

b) Xét các số thực a, b, c với $b \neq a + c$ sao cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm thực m, n thỏa mãn $0 \leq m, n \leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \frac{(a-b)(2a-c)}{a(a-b+c)}$$

HẾT

Lưu ý: Thí sinh không được sử dụng tài liệu, giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

Chữ ký của giám thị 1:.....Chữ ký của giám thị 2:.....

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

BÌNH PHƯỚC

Hướng dẫn chấm gồm 07 trang

Lưu ý: Điểm toàn bài lấy điểm lẻ đến 0,125; thí sinh làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.

HƯỚNG DẪN CHẤM KÌ THI TUYỂN SINH

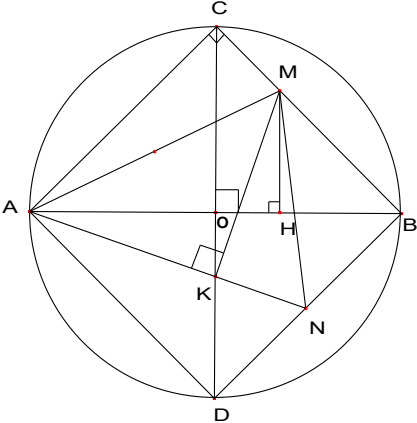
LỚP 10 THPT NĂM HỌC 2018-2019

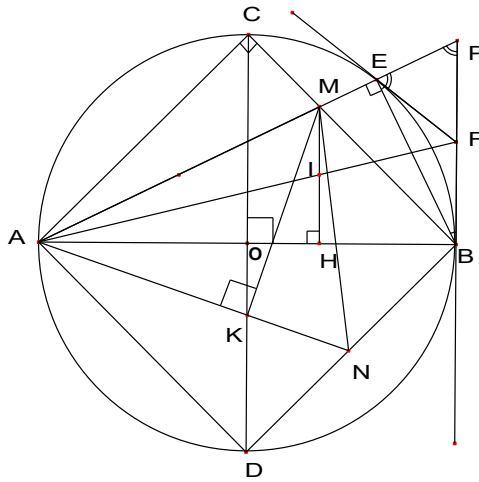
MÔN THI: TOÁN CHUYÊN

Câu	Nội dung	Điểm
1	a) Rút gọn biểu thức $T = \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}+1} + \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-1} - 1 \right) : \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}+1} - \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-1} + 1 \right)$. b) Cho $x + \sqrt{3} = 2$. Tính giá trị của biểu thức: $H = x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 20x + 2023.$	2,0
	a) Rút gọn biểu thức $T = \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}+1} + \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-1} - 1 \right) : \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}+1} - \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-1} + 1 \right)$.	1,0
	Điều kiện: $\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ ab \neq 1 \end{cases}$	0,25
	Ta có: $\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}+1} + \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-1} - 1 = \frac{2\sqrt{ab}(\sqrt{a}+1)}{ab-1}.$	0,25
	Và $\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}+1} - \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}-1} + 1 = \frac{-2(\sqrt{a}+1)}{ab-1}.$	0,25
	Nên $T = \frac{2\sqrt{ab}(\sqrt{a}+1)}{ab-1} : \frac{-2(\sqrt{a}+1)}{ab-1} = -\sqrt{ab}.$	0,25
	b) Cho $x + \sqrt{3} = 2$. Tính giá trị của biểu thức: $H = x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 20x + 2023.$	1,0
	Ta có : $x + \sqrt{3} = 2 \Leftrightarrow 2 - x = \sqrt{3} \Rightarrow (2 - x)^2 = 3 \Leftrightarrow 4 - 4x + x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0.$	0,25
	$H = (x^5 - 4x^4 + x^3) + (x^4 - 4x^3 + x^2) + 5(x^2 - 4x + 1) + 2018.$	0,25
	Suy ra: $H = x^3(x^2 - 4x + 1) + x^2(x^2 - 4x + 1) + 5(x^2 - 4x + 1) + 2018.$	0,25
	Do $x^2 - 4x + 1 = 0$ nên $H = 2018$.	0,25

2	Cho Parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y = (m+1)x - m^2 - \frac{1}{2}$ (m là tham số). Với giá trị nào của m thì đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ sao cho biểu thức $T = y_1 + y_2 - x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.	1,0
	Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{1}{2}x^2 = (m+1)x - m^2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + 2m^2 + 1 = 0 \quad (1)$	0,125
	Để (d) cắt (P) tại hai điểm $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thì phương trình (1) có hai nghiệm. $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 2m^2 - 1 = 2m - m^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2.$ Vậy với $0 \leq m \leq 2$ thì đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.	0,25
	Khi đó theo định lý Viet thì $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1x_2 = 2m^2 + 1 \end{cases}$ Ta có $y_1 = (m+1)x_1 - m^2 - \frac{1}{2}$ $y_2 = (m+1)x_2 - m^2 - \frac{1}{2}$	0,125
	Do đó $T = y_1 + y_2 - x_1x_2 = (m+1)(x_1 + x_2) - 2m^2 - 1 - x_1x_2$ $= 2(m+1)^2 - 4m^2 - 2 = -2m^2 + 4m = 2 - 2(m-1)^2, \forall m \in [0, 2].$	0,125
	Đặt $t = m - 1$. Do $m \in [0, 2] \Rightarrow t \in [-1, 1] \Rightarrow t^2 \in [0, 1]$. Nên $T = 2 - 2(m-1)^2 = 2 - 2t^2 \geq 0$.	0,25
	Vậy giá trị nhỏ nhất của T bằng 0 đạt được khi $t^2 = 1 \Leftrightarrow (m-1)^2 = 1 \Leftrightarrow m = 0; m = 2$.	0,125
3	a) Giải phương trình: $\sqrt{x+1} + \sqrt{6x-14} = x^2 - 5$ b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x^2+1)(y^2+1) = 10 \\ (x+y)(xy-1) = 3 \end{cases}$	2,0
	a) Giải phương trình: $\sqrt{x+1} + \sqrt{6x-14} = x^2 - 5$.	1,0
	Điều kiện: $x \geq \frac{7}{3}$. Nhận xét: với điều kiện trên thì vế phải của phương trình luôn dương. Ta có:	0,125
	$\sqrt{x+1} + \sqrt{6x-14} = x^2 - 5 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} - 2 + \sqrt{6x-14} - 2 = x^2 - 9.$	0,25
	$\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{6(x-3)}{\sqrt{6x-14}+2} - (x-3)(x+3) = 0.$	0,25
	$\Leftrightarrow (x-3) \left[\frac{1}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{6}{\sqrt{6x-14}+2} - (x+3) \right] = 0.$	0,125

	$\Leftrightarrow \left[\frac{x-3=0}{\frac{1}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{6}{\sqrt{6x-14}+2} - (x+3) = 0} \Leftrightarrow \left[\frac{x=3}{\frac{1}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{6}{\sqrt{6x-14}+2} = (x+3)} \quad (*) \right. \right.$	0,125
	Ta có : $\begin{cases} VT(*) < \frac{7}{2} \\ VP(*) > \frac{16}{3} \end{cases} \quad \left(\forall x \geq \frac{7}{3} \right) \Rightarrow PT(*)VN.$ Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$.	0,125
	b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x^2+1)(y^2+1)=10 \\ (x+y)(xy-1)=3 \end{cases}.$	1,0
	$\begin{cases} (x^2+1)(y^2+1)=10 \\ (x+y)(xy-1)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y^2+x^2+y^2+1=10 \\ (x+y)(xy-1)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2+(xy-1)^2=10 \\ (x+y)(xy-1)=3 \end{cases} \quad (I)$	0,125
	Đặt $\begin{cases} x+y=u \\ xy-1=v \end{cases}.$ Khi đó, ta có: $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} u^2+v^2=10 \\ uv=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2-2uv=10 \\ uv=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2=16 \\ uv=3 \end{cases}$	0,125
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} u+v=4 \\ uv=3 \end{cases} \\ \begin{cases} u+v=-4 \\ uv=3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} u=1 \\ v=3 \end{cases} \\ \begin{cases} u=3 \\ v=1 \end{cases} \\ \begin{cases} u=-1 \\ v=-3 \end{cases} \\ \begin{cases} u=-3 \\ v=-1 \end{cases} \end{cases}$	0,125
	- Với $\begin{cases} u=1 \\ v=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ xy=4 \end{cases} \quad (HPTVN)$	0,125
	- Với $\begin{cases} u=3 \\ v=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \end{cases}$	0,125
	- Với $\begin{cases} u=-1 \\ v=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases} \end{cases}$	0,125
	- Với $\begin{cases} u=-3 \\ v=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-3 \\ xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-3 \\ y=0 \end{cases} \end{cases}$	0,125

	Vậy hệ phương trình có các nghiệm là: $(1;2), (2;1), (1;-2), (-2;1), (0;-3), (-3;0)$	0,125
4	Cho đường tròn $(O;R)$ có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. Trên dây BC lấy điểm M (M khác B và C). Trên dây BD lấy điểm N sao cho $\widehat{MAN} = \frac{1}{2}\widehat{CAD}$; AN cắt CD tại K. Từ M kẻ $MH \perp AB$ ($H \in AB$). a) Chứng minh tứ giác $ACMH$ và tứ giác $ACMK$ nội tiếp. b) Tia AM cắt đường tròn (O) tại E (E khác A). Tiếp tuyến tại E và B của đường tròn (O) cắt nhau tại F. Chứng minh rằng AF đi qua trung điểm của HM. c) Chứng minh MN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định khi M di chuyển trên dây BC (M khác B và C).	3,0
	a) Chứng minh tứ giác $ACMH$ và tứ giác $ACMK$ nội tiếp.	1,25
		
	Ta có: $\widehat{ACB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) hay $\widehat{ACM} = 90^\circ$.	0,25
	$\widehat{ACM} = \widehat{AHM} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ACM} + \widehat{AHM} = 180^\circ \Rightarrow$ tứ giác $ACMH$ nội tiếp.	0,25
	Ta lại có:	0,25
	$\widehat{MAK} = \frac{1}{2}\widehat{CAD} = \frac{1}{2}.90^\circ = 45^\circ.$	0,25
	$\widehat{MCK} = \frac{1}{2}s\widehat{DB} = \frac{1}{2}.90^\circ = 45^\circ$	0,25
	$\Rightarrow \widehat{MAK} = \widehat{MCK} \Rightarrow$ tứ giác $ACMK$ nội tiếp.	0,25
	b) Tia AM cắt đường tròn (O) tại E (E khác A). Tiếp tuyến tại E và B của đường tròn (O) cắt nhau tại F . Chứng minh rằng AF đi qua trung điểm của HM .	1,0



Gọi $AF \cap MH = \{I\}$; $AM \cap BF = \{P\}$.

$$MH \parallel PB \text{ vì cùng vuông góc } AB \Rightarrow \frac{MH}{PB} = \frac{AH}{AB} \quad (1)$$

$$IH \parallel FB \Rightarrow \frac{IH}{FB} = \frac{AH}{AB} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) suy ra } \frac{IH}{FB} = \frac{MH}{PB}.$$

Ta có:

$$\widehat{AEB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BEP} = 90^\circ.$$

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau thì $\Rightarrow FE = FB \Rightarrow \widehat{FEB} = \widehat{FBE}$.

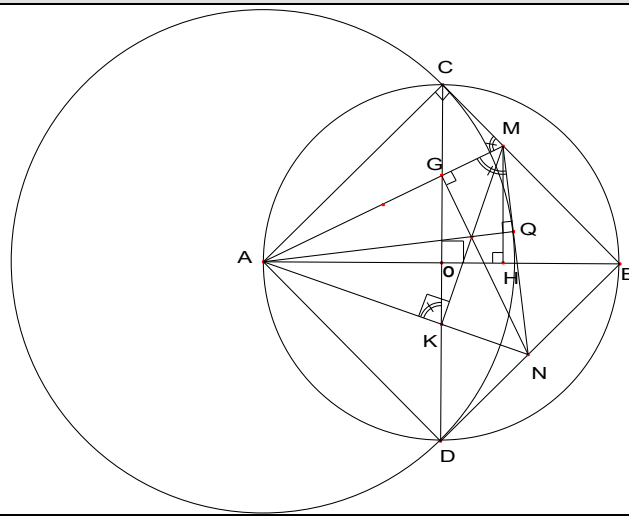
$$\widehat{FEP} = 90^\circ - \widehat{FEB}; \widehat{FPE} = 90^\circ - \widehat{FBE};$$

$$\Rightarrow \widehat{FEP} = \widehat{FPE} \Rightarrow FE = FP.$$

Vì $FE = FP$ và $FE = FB$ do đó $FB = FP$ mà $F \in BP \Rightarrow BP = 2FB$.

$$\text{Suy ra: } \frac{IH}{FB} = \frac{MH}{2FB} \Rightarrow MH = 2IH \Rightarrow AF \text{ đi qua trung điểm } I \text{ của } MH.$$

c) Chứng minh rằng: MN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định khi M di chuyển trên dây BC (M khác B và C).



Vì tứ giác $ACMK$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ACM} = \widehat{MKN} = 90^\circ$.

Gọi giao điểm của AM và dây DC là G .

Tứ giác $ADNG$ có $\widehat{NAG} = \widehat{NDG} = 45^\circ \Rightarrow$ tứ giác $ADNG$ nội tiếp.

$$\Rightarrow \widehat{ADN} = \widehat{MGN} = 90^\circ.$$

	Vì $\widehat{MKN} = \widehat{MGN} = 90^\circ \Rightarrow$ tứ giác $MGKN$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{AKC}$.	0,125
	Mà $\widehat{AMC} = \widehat{AKC}$ vì cùng chắn $\widehat{AC}$ nên $\widehat{AMC} = \widehat{AMN}$.	0,125
	Kẻ AQ vuông góc với MN tại Q . Khi đó $\triangle AMC = \triangle AMQ (ch - gn) \Rightarrow AQ = AC$.	0,125
	Trong đó: $AC = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2}$ không đổi và A là một điểm cố định nên khi M di chuyển trên dây BC thì MN luôn tiếp xúc với đường tròn $(A; R\sqrt{2})$ là một đường tròn cố định.	0,125
5	a) Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $16p+1$ là lập phương của số nguyên dương. b) Tìm tất cả các bộ số nguyên (a,b) thỏa mãn $3(a^2 + b^2) - 7(a+b) = -4$.	1,0
	a) Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $16p+1$ là lập phương của số nguyên dương.	0,5
	Vì $16p+1$ là lẻ và lớn hơn 1 nên có thể đặt $16p+1 = (2n+1)^3, \forall n \in \mathbb{N}^*$.	0,125
	Ta có: $16p+1 = (2n+1)^3 \Leftrightarrow 8p = n(4n^2 + 6n + 3)$	0,125
	Vì $4n^2 + 6n + 3$ là số lẻ lớn hơn 1 và không phân tích được thành tích của hai số nguyên nên từ trên suy ra $\begin{cases} n = 8 \\ 4n^2 + 6n + 3 = p \end{cases}$	0,125
	Từ đó, ta có $p = 307$. Thử lại ta thấy thỏa mãn. Vậy $p = 307$ là số nguyên tố duy nhất thỏa mãn yêu cầu.	0,125
	b) Tìm tất cả các bộ số nguyên (a,b) thỏa mãn $3(a^2 + b^2) - 7(a+b) = -4$.	0,5
	Nhân cả hai vế 12, ta được: $36(a^2 + b^2) - 84(a+b) = -48 \Leftrightarrow (6a-7)^2 + (6b-7)^2 = 50$	0,125
	Số 50 có thể phân tích thành tổng của hai số chính phương là $50 = 25 + 25 = 1 + 49$	0,125

	Nhận xét: Do vai trò của a, b như nhau nên nếu (a, b) thỏa mãn thì (b, a) cũng thỏa mãn. Nên chỉ cần xét các trường hợp sau: TH1: $\begin{cases} (6a-7)^2 = 25 \\ (6b-7)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 6a-7=5 \\ 6a-7=5 \end{cases} \\ \begin{cases} 6a-7=5 \\ 6a-7=-5 \end{cases} \\ \begin{cases} 6a-7=-5 \\ 6a-7=-5 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases} \\ \begin{cases} a=2 \\ b=\frac{1}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=2 \end{cases} \\ \begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=\frac{1}{3} \end{cases} \end{cases}$ TH2: $\begin{cases} (6a-7)^2 = 1 \\ (6b-7)^2 = 49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 6a-7=1 \\ 6b-7=7 \end{cases} \\ \begin{cases} 6a-7=1 \\ 6b-7=-7 \end{cases} \\ \begin{cases} 6a-7=-1 \\ 6b-7=7 \end{cases} \\ \begin{cases} 6a-7=-1 \\ 6b-7=-7 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a=\frac{4}{3} \\ b=\frac{7}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} a=\frac{4}{3} \\ b=0 \end{cases} \\ \begin{cases} a=1 \\ b=\frac{7}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} \end{cases}$	0,125
	Kết hợp với giả thiết và nhận xét ở trên, ta có các bộ số (a, b) thỏa mãn là: $\{(0,1); (1,0), (2,2)\}$	0,125
6	a) Cho x, y là hai số dương. Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} \geq x + y$. b) Xét các số thực a, b, c với $b \neq a + c$ sao cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm thực m, n thỏa mãn $0 \leq m, n \leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \frac{(a-b)(2a-c)}{a(a-b+c)}$	1,0
	a) Cho x, y là hai số dương. Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} \geq x + y$.	0,5
	Với x, y là hai số dương $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} \geq x + y \Leftrightarrow x^3 + y^3 \geq xy(x + y)$.	0,125

	$\Leftrightarrow (x+y)(x^2-xy+y^2) \geq xy(x+y).$	0,125
	$x^2-xy+y^2 \geq xy \Leftrightarrow x^2-2xy+y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0 \text{ (hiển nhiên).}$	0,125
	Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y > 0$.	0,125
	b) Xét các số thực a, b, c với $b \neq a + c$ sao cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm thực m, n thỏa mãn $0 \leq m, n \leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \frac{(a-b)(2a-c)}{a(a-b+c)}$	0,5
	Giả thiết phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm m, n ($0 \leq m \leq 1, 0 \leq n \leq 1$) nên $a \neq 0$. Theo định lí Viète, ta có: $m + n = -\frac{b}{a}$ và $m.n = \frac{c}{a}$	0,125
	Từ đó suy ra: $M = \frac{(a-b)(2a-c)}{a(a-b+c)} = \frac{\left(1 - \frac{b}{a}\right)\left(2 - \frac{c}{a}\right)}{1 - \frac{b}{a} + \frac{c}{a}} = \frac{(1+m+n)(2-mn)}{1+m+n+mn}.$	0,125
	Vì $2 - mn \leq 2$ và $mn \geq 0$ nên $M \leq \frac{(1+m+n).2}{1+m+n} = 2.$ Vậy giá trị lớn nhất của M là 2 đạt được khi $mn = 0$ hay $c = 0$.	0,125
	Do $0 \leq m \leq 1, 0 \leq n \leq 1$ nên $mn \leq 1$, suy ra: $m(n-1) + n(m-1) + (mn-1) \leq 0 \Leftrightarrow mn \leq \frac{1}{3}(1+m+n).$ Do đó: $M \geq \frac{1+m+n}{1+m+n + \frac{1}{3}(1+m+n)} = \frac{3}{4}.$ Vậy giá trị nhỏ nhất của M là $\frac{3}{4}$ đạt được khi $m = n = 1$ hay $a + b + c = 0$ và $a = c$.	0,125