

Câu 1: (2,0 điểm)

1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): y = (m-2)x + 2$ với m là tham số và $m \neq 2$. Tìm tất cả các giá trị của m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng (d) bằng $\frac{2}{3}$.

2) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - (m-1)x^2 + m^2 - m - 1 = 0$ có đúng ba nghiệm phân biệt.

Câu 2: (2,0 điểm)

1) Giải phương trình: $x + 2\sqrt{7-x} = 2\sqrt{x-1} + \sqrt{-x^2 + 8x - 7} + 1$

2) Tìm tất cả các cặp số hữu tỉ $(x; y)$ thỏa mãn hệ phương trình:
$$\begin{cases} 4x^3 - y^3 + x + 4y = 0 \\ 10x^2 - 7xy + 2y^2 = 9 \end{cases}$$

Câu 3: (2,0 điểm)

1) Tìm các số tự nhiên n thỏa mãn $4^{2019} + 3^n$ có chữ số tận cùng là 7.

2) Tìm các bộ số tự nhiên $(a_1; a_2; a_3; \dots; a_{2019})$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2019} \geq 2019^2 \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{2019}^2 \leq 2019^3 + 1 \end{cases}$$

Câu 4: (1,0 điểm)

1) Cho các số thực dương x , chứng minh $\frac{x^3+1}{x+2} \geq \frac{7}{18}x^2 + \frac{5}{18}$.

2) Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3+b^3}{a+2b} + \frac{b^3+c^3}{b+2c} + \frac{c^3+a^3}{c+2a} \geq 2.$$

Câu 5: (3,0 điểm)

Cho hình vuông ABCD với tâm O. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Các điểm N, P theo thứ tự thuộc các cạnh BC, CD sao cho $MN \parallel AP$. Chứng minh rằng:

1) Tam giác ADP đồng dạng với tam giác NBM.

2) $BN \cdot DP = OB^2$.

3) DO là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác OPN.

4) Ba đường thẳng BD, AN, PM đồng quy.

----- Hết -----

SƠ LƯỢC BÀI GIẢI

Câu 1: (2,0 điểm)

1) (d) cắt Ox tại $A\left(\frac{2}{2-m}; 0\right)$ và cắt Oy tại $B(0; 2)$. Gọi OH là khoảng cách từ O đến (d)

$$\text{Ta có: } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \Leftrightarrow \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{2-m}\right)^2} + \frac{1}{2^2} \Leftrightarrow (2-m)^2 = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-m=2\sqrt{2} \\ 2-m=2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2-2\sqrt{2} \\ m=2+2\sqrt{2} \end{cases}$$

(TMĐK $m \neq 2$).

Vậy $\begin{cases} m=2-2\sqrt{2} \\ m=2+2\sqrt{2} \end{cases}$ thì khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng (d) bằng $\frac{2}{3}$.

2) Đặt $t = x^2 \geq 0$; phương trình đã cho trở thành $t^2 - (m-1)t + m^2 - m - 1 = 0 (*)$

Khi đó phương trình đã cho có đúng ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có một nghiệm bằng 0 và

$$\text{một nghiệm dương } (t_2 > t_1 = 0) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 1 = 0 \\ t_1 t_2 \geq 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 1 = 0 \\ m^2 - m - 1 \geq 0 \\ m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 1 = 0 \\ m > 1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } m^2 - m - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} m - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \\ m - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \\ m = \frac{-\sqrt{5}+1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Lại có } m > 1, \text{ nên } m = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Câu 2: (2,0 điểm)

1) ĐK: $1 \leq x \leq 7$

$$\text{Ta có: } x + 2\sqrt{7-x} = 2\sqrt{x-1} + \sqrt{-x^2 + 8x - 7} + 1 \Leftrightarrow x - 1 - 2\sqrt{x-1} - \sqrt{(7-x)(x-1)} + 2\sqrt{7-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}(\sqrt{x-1} - 2) - \sqrt{7-x}(\sqrt{x-1} - 2) = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x-1} - 2)(\sqrt{x-1} - \sqrt{7-x}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} - 2 = 0 \\ \sqrt{x-1} - \sqrt{7-x} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=4 \\ x-1=7-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=4 \end{cases} \text{ (TMĐK). Vậy tập nghiệm của phương trình là } S = \{4; 5\}$$

$$2) \begin{cases} 4x^3 - y^3 + x + 4y = 0 \\ 10x^2 - 7xy + 2y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4y = y^3 - 4x^3 \\ 10x^2 - 7xy + 2y^2 = 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (10x^2 - 7xy + 2y^2)(x + 4y) = 9(y^3 - 4x^3) \Leftrightarrow 46x^3 + 33x^2y - 26xy^2 - y^3 = 0 (*)$$

$$\text{Nếu } y = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x^3 + x = 0 \\ 10x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(4x^2 + 1) = 0 \\ x^2 = \frac{9}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \frac{3}{\sqrt{10}} \end{cases} \text{ (không xảy ra), nên } y \neq 0$$

$$\text{Với } y \neq 0; (*) \Leftrightarrow 46\left(\frac{x}{y}\right)^3 + 33\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 26\frac{x}{y} - 1 = 0 \Leftrightarrow 46t^3 + 33t^2 - 26t - 1 = 0 \Leftrightarrow (2t-1)(23t^2 + 28t + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2t-1)(23t^2+28t+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2t-1=0 \\ 23t^2+28t+1=0 \end{cases} \left(t=\frac{x}{y} \in Q \right)$$

$$+) 2t-1=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{y}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x=y$$

$$\text{Khi đó } 10x^2-7x \cdot 2x+2(2x)^2=9 \Leftrightarrow 4x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm \frac{3}{2}$$

$$\text{Với } x=\frac{3}{2} \Rightarrow y=2 \cdot \frac{3}{2}=3; \text{ Với } x=-\frac{3}{2} \Rightarrow y=2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)=-3$$

+) $23t^2+28t+1=0$ không có nghiệm hữu tỉ, vì có $\Delta'=173$

Vậy các cặp số $(x; y)$ cần tìm là $\left(\frac{3}{2}; 3\right)$ và $\left(-\frac{3}{2}; -3\right)$

Câu 3: (2,0 điểm)

1) Ta có: $4^{2019}+3^n=4 \cdot (4^2)^{1009}+3^n=4 \cdot 16^{1009}+3^n=4 \cdot (\dots 6)+3^n=(\dots 4)+3^n$

Do đó $4^{2019}+3^n$ có chữ số tận cùng bằng 7 khi 3^n có chữ số tận cùng bằng 3

$$\Rightarrow 3^n=3 \cdot (\dots 1)=3 \cdot (3^4)^k=3^{4k+1} \Rightarrow n=4k+1 (k \in N)$$

2) Ta có: $\begin{cases} a_1+a_2+a_3+\dots+a_{2019} \geq 2019^2 \\ a_1^2+a_2^2+a_3^2+\dots+a_{2019}^2 \leq 2019^3+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4038(a_1+a_2+a_3+\dots+a_{2019}) \leq -4038 \cdot 2019^2 \\ a_1^2+a_2^2+a_3^2+\dots+a_{2019}^2 \leq 2019^3+1 \end{cases}$

$$\Rightarrow a_1^2+a_2^2+a_3^2+\dots+a_{2019}^2-4038(a_1+a_2+a_3+\dots+a_{2019}) \leq 2019^3+1-4038 \cdot 2019^2$$

$$\Leftrightarrow (a_1^2-4038a_1+2019^2)+(a_2^2-4038a_2+2019^2)+\dots+(a_{2019}^2-4038a_{2019}+2019^2) \leq 2019^3+1-2019 \cdot 2019^2$$

$$\Leftrightarrow (a_1-2019)^2+(a_2-2019)^2+\dots+(a_{2019}-2019)^2 \leq 1$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} (a_1-2019)^2+(a_2-2019)^2+\dots+(a_{2019}-2019)^2=0 (*) \\ (a_1-2019)^2+(a_2-2019)^2+\dots+(a_{2019}-2019)^2=1 (**) \end{cases}$$

Từ (*) $\Rightarrow a_1=a_2=\dots=a_{2019}=2019$

Từ (**) $\Rightarrow$ trong các số $a_1; a_2; \dots; a_{2019}$ có một số bằng 2018 hoặc 2020 và các số còn lại bằng 2019. Giả sử $a_1=2018$ hoặc $a_1=2020$ và $a_2=a_3=\dots=a_{2019}=2019$

+) TH: $a_1=2018$ và $a_2=a_3=\dots=a_{2019}=2019$

$$\Rightarrow a_1+a_2+a_3+\dots+a_{2019}=2018+2018 \cdot 2019 < 2019+2018 \cdot 2019=2019^2$$

Mâu thuẫn với $a_1+a_2+a_3+\dots+a_{2019} \geq 2019^2$

+) TH: $a_1=2020$ và $a_2=a_3=\dots=a_{2019}=2019$

$$\Rightarrow a_1^2+a_2^2+a_3^2+\dots+a_{2019}^2=2020^2+2018 \cdot 2019^2=2019^2+2 \cdot 2019+1+2018 \cdot 2019^2$$

$$=(2019^2+2018 \cdot 2019^2)+1+2 \cdot 2019=2019^3+1+2 \cdot 2019 > 2019^3+1$$

Mâu thuẫn với $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\dots+a_{2019}^2 \leq 2019^3+1$

Vậy $(a_1; a_2; a_3; \dots; a_{2019})=(2019; 2019; 2019; \dots; 2019)$

Câu 4: (1,0 điểm)

1) Vì $x > 0$, nên $\frac{x^3+1}{x+2} \geq \frac{7}{18}x^2 + \frac{5}{18} \Leftrightarrow 18(x^3+1)-(x+2)(7x^2+5) \geq 0 \Leftrightarrow 11x^3-14x^2-5x+8 \geq 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(11x+8) \geq 0; \text{ luôn đúng với mọi } x > 0$$

2) Áp dụng kết quả của 1), với $x = \frac{a}{b} > 0$ (do $a > 0; b > 0$).

Tương tự $\frac{b^3+c^3}{b+2c} \geq \frac{7}{18}b^2 + \frac{5}{18}c^2$; $\frac{c^3+a^3}{c+2a} \geq \frac{7}{18}c^2 + \frac{5}{18}a^2$

$$\text{Dấu “=” xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = 1 \\ \frac{b}{c} = 1 \\ \frac{c}{a} = 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 3; a, b, c > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1$$

Xét $\triangle ADP$ và $\triangle NBM$: $\widehat{ADP} = \widehat{NBM} = 90^\circ$ (ABCD là hình vuông); $\widehat{DAP} = \widehat{BNM}$ (*cmt*)

Vậy $\triangle ADP \sim \triangle NBM$ (g-g)

$$2) BN \cdot DP = OB^2$$

$$\text{Đặt } AB = BC = CD = DA = a \Rightarrow AM = BM = \frac{a}{2}$$

$$\text{Vì } \triangle ADP \sim \triangle NBM \text{ (cmt)} \Rightarrow \frac{AD}{BN} = \frac{DP}{BM} \Rightarrow BN \cdot DP = AD \cdot BM = a \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{Lại có } ABCD \text{ là hình vuông tâm O, nên } \triangle AOB \text{ vuông cân tại O} \Rightarrow OB^2 = \frac{AB^2}{2} = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{Vậy } BN \cdot DP = OB^2 \text{ (đpcm)}$$

3) DO là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác OPN.

$$\text{Ta có: } BN \cdot DP = OB^2 \text{ (cmt)} \Rightarrow \frac{BN}{BO} = \frac{BO}{DP} = \frac{DO}{DP} \text{ (do } BO = DO)$$

$$\text{Xét } \triangle BNO \text{ và } \triangle DOP: \widehat{OBN} = \widehat{PDO} = 45^\circ \text{ (ABCD là hình vuông); } \frac{BN}{BO} = \frac{DO}{DP} \text{ (cmt)}$$

$$\text{Vậy } \triangle BNO \sim \triangle DOP \text{ (c-g-c)} \Rightarrow \widehat{BON} = \widehat{DPO}$$

$$\text{Do đó: } \widehat{DOP} + \widehat{BON} = \widehat{DOP} + \widehat{DPO} = 180^\circ - \widehat{ODP} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{NOP} = 180^\circ - (\widehat{DOP} + \widehat{BON}) = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$

$$\text{Mặt khác } \triangle BNO \sim \triangle DOP \text{ (cmt)} \Rightarrow \frac{ON}{OP} = \frac{OB}{DP} = \frac{DO}{DP} \text{ (do } OB = DO)$$

$$\text{Xét } \triangle ONP \text{ và } \triangle DOP: \widehat{NOP} = \widehat{ODP} = 45^\circ \text{ (cmt); } \frac{ON}{OP} = \frac{DO}{DP} \text{ (cmt)}$$

$$\text{Vậy } \triangle ONP \sim \triangle DOP \text{ (c-g-c)} \Rightarrow \widehat{ONP} = \widehat{DOP}$$

Vẽ tia Ox là tia tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle OPN$ (Ox nằm trên nửa mặt phẳng bờ AC có chứa điểm D), ta có $\widehat{xOP} = \widehat{ONP}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây)

Do đó $\widehat{xOP} = \widehat{DOP} \Rightarrow$ tia OD trùng với tia Ox. Vậy OD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác OPN (đpcm)

4) Ba đường thẳng BD, AN, PM đồng quy.

$$\text{Gọi } \{I\} = BD \cap AN; \{I'\} = BD \cap MP$$

$$\text{Xét } \triangle AID: AD \parallel BN \text{ (} AD \parallel BD \text{)} \Rightarrow \frac{IB}{ID} = \frac{BN}{AD} \text{ (hệ quả Thales)}$$

$$\text{Xét } \triangle BIM: BM \parallel DP \text{ (} AB \parallel CD \text{)} \Rightarrow \frac{I'B}{I'D} = \frac{BM}{DP} \text{ (hệ quả Thales)}$$

$$\text{Mà } \triangle ADP \sim \triangle NBM \text{ (cmt)} \Rightarrow \frac{BN}{AD} = \frac{BM}{DP}.$$

$$\text{Do đó } \frac{IB}{ID} = \frac{I'B}{I'D} \Rightarrow I \equiv I'. \text{ Vậy ba đường thẳng BD, AN, PM đồng quy.}$$