

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

ĐỀ THI MÔN: TOÁN (Chuyên)

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề

Ngày thi: 05/6/2021

Câu 1 (3,0 điểm).

a) Rút gọn biểu thức $P = \frac{x\sqrt{x}-1}{1+x+\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{\sqrt{x}+1}{x-1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-\sqrt{x}-2} \right)$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 4$.

b) Giải phương trình $5x - (x+4)\sqrt{2x+1} + 4 = 0$.

c) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 + 3xy + 4x + 3y + 2 = 0 \\ \sqrt{x^2 - y + 3} + \sqrt{x + y + 1} = 2 \end{cases}$$

Câu 2 (2,0 điểm).

a) Cho hai đa thức $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ và $Q(x) = 3x^2 + 2ax + b$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$). Biết rằng $P(x)$ có ba nghiệm phân biệt. Chứng minh $Q(x)$ có hai nghiệm phân biệt.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình $(xy - 1)^2 = x^2 + y^2$.

Câu 3 (1,0 điểm). Xét các số thực a, b, c không âm, thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ac} + \frac{c}{1+ab}$.

Câu 4 (3,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$). Một đường tròn đi qua B, C và không đi qua A cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại E, F (E khác B ; F khác C); BF cắt CE tại D . Gọi P là trung điểm của BC và K là điểm đối xứng với D qua P .

a) Chứng minh tam giác KBC đồng dạng với tam giác DFE và $\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{CK}$.

b) Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của D trên AB, AC . Chứng minh MN vuông góc với AK và $MA^2 + NK^2 = NA^2 + MK^2$.

c) Gọi I, J lần lượt là trung điểm AD và MN . Chứng minh ba điểm I, J, P thẳng hàng.

d) Đường thẳng IJ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác IMN tại T (T khác I). Chứng minh AD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác DTJ .

Câu 5 (1,0 điểm). Cho tam giác ABC và điểm O thay đổi trong tam giác. Tia Ox song song với AB cắt BC tại D , tia Oy song song với BC cắt AC tại E , tia Oz song song với AC cắt AB tại F . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \left(\frac{AB}{OD} \right)^2 + \left(\frac{BC}{OE} \right)^2 + \left(\frac{AC}{OF} \right)^2$.

----- HẾT -----