SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH ĐỒNG THÁP	KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI DỰ THI CẤP QUỐC GIA NĂM 2019
ĐỀ CHÍNH THỨC *(Đề gồm có 05 trang)*	**Môn: TOÁN** Ngày thi: **12/7/2018** *Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề*

Câu 1. (4,0 điểm)

a) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn:

$$x-\frac{1}{y^2}=y-\frac{1}{z^2}=z-\frac{1}{x^2}=1.$$

Tính giá trị biểu thức $P=x\sqrt{y-1}+y\sqrt{z-1}+z\sqrt{x-1}.$

b) Cho các số thực dương a,b thỏa mãn $a-a^3 \geq b+b^3$. Chứng minh rằng $a^2+b^2<1.$

Câu 2. (4,0 điểm)

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 8(x^4+y^2-xy^3)-9x=0 \\ 8(y^4+x^2-yx^3)-9y=0 \end{cases}$$

Câu 3. (4,0 điểm)

Xét phương trình $x^{31}+y^5=z^{2018}$.

a) Chứng minh rằng tồn tại vô số bộ ba số nguyên x, y, z thỏa mãn phương trình trên.

b) Có tồn tại hay không bộ ba số nguyên dương x, y, z thoả mãn phương trình trên?

Câu 4. (6,0 điểm)

Cho đường thẳng d và điểm A cố định không thuộc d, H là hình chiếu của A trên d. Các điểm B, C thay đổi trên d sao cho $\overline{HB}.\overline{HC}=-1$. Đường tròn đường kính AH cắt AB, AC lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh đường thẳng MN đi qua một điểm cố định.

b) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMC. Chứng minh O chạy trên một đường thẳng cố định.

Câu 5. (2,0 điểm)

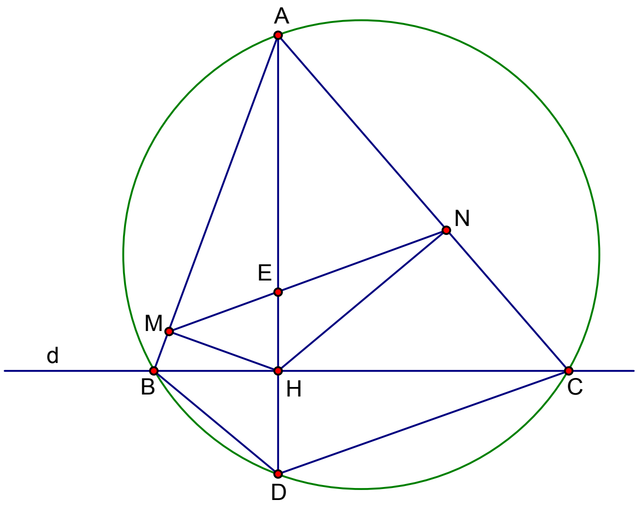
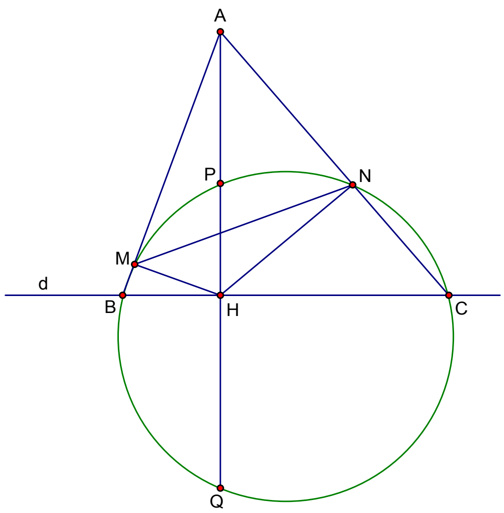
Cho bảng ô vuông gồm m hàng và n cột. Tại ô góc trên bên trái của bảng người ta đặt một quân cờ. Hai người chơi luân phiên di chuyển quân cờ, mỗi lượt di chuyển chỉ di chuyển quân cờ sang phải một ô hoặc xuống dưới một ô. Người chơi nào đến lượt mình không di chuyển được quân cờ thì thua. Xác định điều kiện của m,n để người thực hiện lượt chơi đầu tiên luôn là người thắng.

-HẾT-

II. Đáp án và thang điểm

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
1.	**a**		
		Tính giá trị biểu thức $P = x\sqrt{y-1} + y\sqrt{z-1} + z\sqrt{x-1}$	**2,0**
		Từ giả thiết ta có: $\begin{cases} x = \dfrac{1}{y^2} + 1 \ (1) \\ y = \dfrac{1}{z^2} + 1 \ (2) \\ z = \dfrac{1}{x^2} + 1 \ (3) \end{cases}$	0,25
		Suy ra $x, y, z > 1$.	0,25
		Nếu $x > y$ thì từ (1) và (2) suy ra $y < z$.	0,25
		Từ (2) và (3) suy ra $x < z$. Từ (1) và (3) suy ra $y > x$, vô lý.	0,25
		Tương tự, nếu $x < y$ ta cũng dẫn đến điều vô lý.	0,25
		Suy ra $x = y$. Từ đó có $x = y = z$.	0,25
		Thay $x = y = z$ vào giả thiết ta có $x^3 - x^2 = 1$.	0,25
		Do đó $P = 3x\sqrt{x-1} = 3\sqrt{x^3 - x^2} = 3$.	0,25
	b	Chứng minh $a^2 + b^2 < 1$	**2,0**
		Do $a - a^3 = b + b^3 > 0$ nên $0 < a < 1$.	0,5
		Do đó, $b + b^3 < 1$. Suy ra $0 < b < 1$.	0,5
		Giả sử $a^2 + b^2 \geq 1$. Từ giả thiết ta có: $$a - b = (a+b)(a^2 + b^2 - ab) \geq (a+b)(1 - ab).$$	0,5
		Suy ra: $a(a+b) \geq 2$, vô lý (vì $0 < a, b < 1$).	0,5
2.		Giải hệ $\begin{cases} 8(x^4 + y^2 - xy^3) - 9x = 0 \\ 8(y^4 + x^2 - yx^3) - 9y = 0 \end{cases}$	**4,0**
		Dễ thấy cặp $(0;0)$ là một nghiệm Nếu $x = 0$ thì $y = 0$	0,25
		Nếu $y = 0$ thì $x = 0$	0,25

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
		Xét x, y đều khác 0. Lúc đó hệ trên tương đương với $$\begin{cases} 8(x^4y + y^3 - xy^4) - 9xy = 0 \\ 8(xy^4 + x^3 - x^4y) - 9xy = 0 \end{cases}$$	0,75
		Trừ theo từng vế hai phương trình của hệ ta được $$8\left[2xy\left(x^3 - y^3\right) - \left(x^3 - y^3\right)\right] = 0$$	0,25
		Tức $(x^3 - y^3)(2xy - 1) = 0$	0,25
		TH1. $x = y$: Thay vào hệ đã cho ta được $x = y = \frac{9}{8}$.	1,0
		TH2. $2xy = 1$: Thay vào hệ đã cho ta được các nghiệm $\left(1; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{2}; 1\right)$	1,0
		Vậy hệ có nghiệm là: $(0;0); \left(\frac{9}{8}; \frac{9}{8}\right); \left(\frac{1}{2}; 1\right); \left(1; \frac{1}{2}\right)$	0,25
3.	**a**	$x^{31} + y^5 = z^{2018}$.	
		Chứng minh rằng tồn tại vô số bộ ba số nguyên x, y, z thỏa mãn phương trình trên.	**2,0**
		Cho $x = 0$ phương trình trở thành: $y^5 = z^{2018}$.	0,5
		Chọn $y = a^{2018}$ (a là số nguyên tùy ý). Suy ra $z = a^5$.	0,5
		Khi đó $(x, y, z) = \left(0; a^{2018}; a^5\right)$ thoả mãn phương trình.	0,5
		Vì a nguyên tuỳ ý nên tồn tại vô số bộ ba (x, y, z) nguyên thoả mãn phương trình.	0,5
	b	Có tồn tại hay không các số nguyên dương x, y, z thoả mãn phương trình trên?	**2,0**
		Tồn tại. Xét $x = 2^{5m}, y = 2^{31m}$ $\left(m \in \mathbb{Z}^+\right)$. Khi đó: $x^{31} + y^5 = 2^{155m+1}$.	0,5
		Ta cần chọn m sao cho $$155m + 1 = 2018n\left(n \in \mathbb{Z}^+\right)\ (1).$$	0,5
		Khi đó $z = 2^n$. Từ (1) suy ra $2018n - 1$ chia hết cho 155 $\Leftrightarrow$ $3n - 1$ chia hết cho 155.	0,25
		Đặt $3n - 1 = 155k\left(k \in \mathbb{Z}^+\right)$ ta suy ra $156k + (1 - k)$ chia hết cho 3 $\Leftrightarrow k - 1$ chia hết cho 3.	0,25
		Do đó $k = 3q + 1\left(q \in \mathbb{Z}^+\right)$. Từ đó ta có: $m = 2018q + 677$.	0,25
		Như vậy tất cả các bộ $x = 2^{5(2018q+677)}, y = 2^{31(2018q+677)}, z = 2^{155q+52}$ đều là nghiệm của phương trình đã cho.	0,25

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
		(Phương trình (1) có thể giải bằng cách chỉ ra nghiệm riêng $(m_0;n_0)=(677;52)$ *và sử dụng công thức nghiệm:* $\begin{cases} m=2018q+677 \\ n=155q+52 \end{cases}$ *)*	
4.	**a**	Chứng minh đường thẳng MN đi qua một điểm cố định	**3,0**
		 Gọi D là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC với đường thẳng AH.	0,25
		Ta có: $\overline{HA}.\overline{HD}=\overline{HB}.\overline{HC}=-1.$	0,75
		Do đó D cố định.	0,25
		Gọi E là giao của MN với AH. Ta có tứ giác AMHN nội tiếp nên: $\widehat{AMN}=\widehat{AHN}=\widehat{ACB}=\widehat{ADB}.$	0,75
		Do đó, tứ giác MBDE nội tiếp.	0,25
		Suy ra: $\overline{AE}.\overline{AD}=\overline{AM}.\overline{AB}=AH^2.$	0,5
		Vậy E cố định.	0,25
	b	Chứng minh O chạy trên một đường thẳng cố định	**3,0**
			0,5

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
		Do $\overline{AM}.\overline{AB}=\overline{AN}.\overline{AC}=AH^2$ nên tứ giác BMNC nội tiếp. Do đó, O là tâm đường trong ngoại tiếp tứ giác BMNC.	
		Giả sử đường tròn $(BMNC)$ cắt đường thẳng AH tại P và Q. Ta có: $$\overline{HP}.\overline{HQ}=\overline{HB}.\overline{HC}=-1.$$	0,75
		$$\overline{AP}.\overline{AQ}=\overline{AM}.\overline{AB}=AH^2.$$	0,75
		Từ đó suy ra P, Q cố định.	0,5
		Vậy O thuộc trung trực của PQ cố định.	0,5
5.		Xác định điều kiện m,n để người chơi đầu tiên luôn thắng.	**2,0**
		Ta tô màu các ô của bảng ô vuông lần lượt bằng hai màu trắng và đen với ô trên cùng bên trái của bảng là màu trắng (tô đan xen như bàn cờ). Ta gọi người thứ nhất là người thực hiện di chuyển đầu tiên và người còn lại là người thứ hai. Gọi ô thuộc hàng p cột q là ô $(p;q)$.	0,25
		Khi đó: + Nếu m,n cùng tính chẵn lẻ thì ô $(1;1)$ có cùng màu với ô $(m;n)$ + Nếu m,n khác tính chẵn lẻ thì ô $(1;1)$ khác màu với ô $(m;n)$	0,25
		Ta thấy mỗi lượt di chuyển (theo quy tắc di chuyển của bài toán) cả hai người chơi điều phải di chuyển cờ sang ô khác màu với ô cờ đang đứng.	0,25
		Vì quy luật di chuyển của bài toán là hoặc chỉ xuống 1 ô hoặc chỉ sang phải 1 ô nên: + Ở lượt di chuyển đầu tiên, người thứ nhất sẽ di chuyển cờ sang ô đen, người thứ hai sẽ di chuyển cờ sang ô trắng và đây là bất biến của bài toán. + Cờ luôn được đưa về ô (m,n) điều này có nghĩa người thắng phải là người trong lượt chơi của mình phải đặt cờ vào ô (m,n) (và như vậy người còn lại không di chuyển cờ được).	0,5
		Do đó để người thứ nhất luôn thắng thì ô (m,n) phải trùng màu với ô mà người thứ nhất di chuyển lần đầu tiên (tức ô đen). Hay nói cách khác ô (m,n) phải khác màu với ô $(1;1)$ thì người thứ nhất luôn thắng. Điều đó có nghĩa m,n phải khác tính chẵn lẻ.	0,25
		Ngược lại, nếu m,n có cùng tính chẵn lẽ. Theo lập luận trên người thứ hai luôn thắng (dù người thứ nhất có di chuyên như thế nào).	0,25
		Vậy m,n phải khác tính chẵn lẻ thì người thứ nhất luôn thắng.	0,25

-HẾT-