

Đề chính thức

Môn thi: TOÁN

(Đề gồm có 01 trang)

Thời gian: 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1 (6,0 điểm).

a) Giải phương trình $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x - 3 = 0$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x - \sqrt{x+y} = \sqrt{2y-x^2+2x} \\ (2 - \sqrt{x+y})\sqrt{x^2+4} = 2\sqrt{3x} \end{cases}$$

Câu 2 (3,0 điểm).

a) Tìm $x \in \mathbb{R}$ sao cho $x + \sqrt{2024}$ và $\frac{1}{x} - \sqrt{2024}$ đều là các số nguyên.

b) Tìm số nguyên dương a nhỏ nhất sao cho $2a$ là số lập phương và $5a$ là số chính phương.

Câu 3 (2,0 điểm).

Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a, b, c \geq 1$ và $a^2 + 4b^2 + c^2 + 2ab + 12 = 3(a + 5b + c)$. Tìm giá trị

nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{a^3}{a+(a+b)^2} + \frac{a^2}{a+c^2}$.

Câu 4 (7,0 điểm).

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O . Trên đường tròn (O) lấy điểm D khác phía A so với đường thẳng BC ($BD > AC$). Qua B kẻ đường thẳng d song song với CD . Đường thẳng d cắt đường thẳng AC tại E , cắt đường tròn (O) tại F (F khác B).

a) Gọi J là trung điểm của EC . Chứng minh rằng 4 điểm A, F, O, J cùng nằm trên một đường tròn.

b) Đường thẳng OE cắt đường thẳng AD tại I . Chứng minh rằng $\widehat{IBA} = \widehat{BDA}$.

c) Trên tia BD lấy điểm M sao cho $BM = BA$. Đường thẳng AM cắt đường thẳng DC tại N , đường thẳng BN cắt (O) tại K (K khác B). Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC . Đường thẳng BD cắt các đường thẳng NH, CK lần lượt tại P, Q .

Chứng minh rằng $\frac{1}{PM} = \frac{1}{MQ} + \frac{1}{BM}$.

Câu 5 (2,0 điểm).

Cho một đa giác lồi có diện tích bằng 2024cm^2 . Chứng minh rằng bao giờ cũng vẽ được trong đa giác đó một tam giác có diện tích không nhỏ hơn 759cm^2 .

Đáp án đề thi vào lớp 10 môn Toán chuyên Phan Bội Châu Nghệ An năm 2023

NGUYỄN NHẬT HUY – VÕ TRỌNG KHẢI

NGÀY 8 THÁNG 6 NĂM 2023

Câu 1

a) Giải phương trình $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x - 3 = 0$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x - \sqrt{x+y} = \sqrt{2y-x^2+2x} \\ (2 - \sqrt{x+y})\sqrt{x^2+4} = 2\sqrt{3x} \end{cases}$.

Lời giải.

a) Ta biến đổi phương trình như sau

$$\begin{aligned} x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x - 3 = 0 &\Leftrightarrow (x^2 - 2x - 1)(x^2 - 2x + 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \text{ (vì } x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 > 2 > 0) \\ &\Leftrightarrow x \in \{1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}\}. \end{aligned}$$

Như vậy, tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}\}$.

b) Điều kiện xác định: $x + y \geq 0, 2y - x^2 + 2x \geq 0$.

Trước hết ta có biến đổi sau.

$$\begin{aligned} 2x - \sqrt{x+y} = \sqrt{2y-x^2+2x} &\Leftrightarrow (2x - \sqrt{x+y})^2 = 2y - x^2 + 2x \\ &\Leftrightarrow 4x^2 - 4x\sqrt{x+y} + x + y = 2y - x^2 + 2x \\ &\Leftrightarrow 5x^2 - 4x\sqrt{x+y} - (x+y) = 0 \\ &\Leftrightarrow 5x(x - \sqrt{x+y}) + \sqrt{x+y}(x - \sqrt{x+y}) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - \sqrt{x+y})(5x + \sqrt{x+y}) = 0. \end{aligned}$$

Lúc này, ta xét hai trường hợp sau.

○ **Trường hợp 1.** $x - \sqrt{x+y} = 0$ suy ra $x = \sqrt{x+y} (x \geq 0)$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta được

$$\begin{aligned} (2-x)\sqrt{x^2+4} = 2\sqrt{3x} &\Leftrightarrow (2-x)^2(x^2+4) = 12x^2 \\ &\Leftrightarrow (x^2-4x+4)(x^2+4) = 12x^2 \\ &\Leftrightarrow x^4 + 4x^2 - 4x^3 - 16x + 4x^2 + 16 = 12x^2 \\ &\Leftrightarrow x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 16x + 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 6x + 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 6x + 4 = 0 \text{ (vì } x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 > 1 > 0) \\ &\Leftrightarrow x \in \{3 - \sqrt{5}, 3 + \sqrt{5}\}. \end{aligned}$$

Để ý điều kiện $0 \leq x \leq 2$ nên $x = 3 + \sqrt{5}$ loại suy ra $x = 3 - \sqrt{5}$.

Khi đó, thay vào biểu thức ta được $3 - \sqrt{5} = \sqrt{3 - \sqrt{5} + y}$ suy ra $y = 11 - 5\sqrt{5}$.

Thử lại, ta thấy nghiệm trên thỏa mãn.

○ **Trường hợp 2.** $5x + \sqrt{x+y} = 0$ suy ra $\sqrt{x+y} = -5x (x \leq 0)$

Thay vào phương trình đầu của hệ, ta có

$$7x = \sqrt{2y - x^2 + 2x}.$$

Từ đây kết hợp $x \leq 0$ suy ra $x = y = 0$. Thử lại, ta thấy nghiệm trên không thỏa.

Như vậy, tất cả các nghiệm của hệ phương trình là $(x, y) = \{3 - \sqrt{5}, 11 - 5\sqrt{5}\}$.



Câu 2

- a) Tìm $x \in \mathbb{R}$ sao cho $x + \sqrt{2024}$ và $\frac{1}{x} - \sqrt{2024}$ đều là các số nguyên.
- b) Tìm số nguyên dương a nhỏ nhất sao cho $2a$ là số lập phương và $5a$ là số chính phương.

Lời giải.

- a) Theo giả thiết ta có thể đặt như sau $x + \sqrt{2024} = a, \frac{1}{x} - \sqrt{2024} = b$ thì $a, b \in \mathbb{Z}$.
 Bằng các phép biến đổi ta được

$$(a - \sqrt{2024})(b + \sqrt{2024}) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2024}(a - b) = 2025 - ab.$$

Vì $\sqrt{2024}$ vô tỷ và $a - b, 2025 - ab$ nguyên nên $a = b$ và $2025 = ab$ suy ra $a = b = \pm 45$.
 Khi đó bằng phép thế ta được

$$x + \sqrt{2024} = a = \pm 45 \Leftrightarrow x \in \{45 - \sqrt{2024}, -45 - \sqrt{2024}\}.$$

Vậy tất cả giá trị x thỏa mãn là $x \in \{45 - \sqrt{2024}, -45 - \sqrt{2024}\}$.

- b) Theo giả thiết $2a = b^3$ (1) và $5a = c^2$ (2) với b, c là các số nguyên dương.
 Từ (1) suy ra b^3 chia hết cho 2, mà 2 là số nguyên tố nên b chia hết cho 2.
 Đặt $b = 2d$, thay vào (1) được $2a = 8d^3$, hay là $a = 4d^3$ (3).
 Từ (2) suy ra c^2 chia hết cho 5, mà 5 là số nguyên tố nên c chia hết cho 5.
 Đặt $c = 5e$, thay vào (2) được $5a = 25e^2$, hay là $a = 5e^2$ (4).
 Từ (3) và (4) có $a = 4d^3 = 5e^2$ (5) với d, e là các số nguyên dương. Do 4 và 5 là hai số nguyên tố cùng nhau nên từ (5) thì d^3 chia hết cho 5, suy ra d chia hết cho 5.
 Đặt $d = 5k$, thay vào (5) được $a = 5e^2 = 500k^3$ với k là số nguyên dương.
 Từ đó $e^2 = 100k^3 = 10^2 k^3$. Điều này xảy ra với số k nhỏ nhất là $k = 1, e = 10$ và $a = 500$.
 Lúc đó $2a = 1000 = 10^3$ và $5a = 2500 = 50^2$ thỏa mãn bài toán.
 Vậy số nguyên dương a nhỏ nhất thỏa mãn là $a = 500$.



Bài toán số học ở câu b là bài toán không mới cũng như không quá khó nhưng lạ các bạn có thể tham khảo bài toán tương tự như sau.



Tìm số nguyên dương a nhỏ nhất sao cho $2a$ là số chính phương và $3a$ là số lập phương.

Tạp chí toán học tuổi trẻ số 505

Câu 3 Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a, b, c \geq 1$ và $a^2 + 4b^2 + c^2 + 2ab + 12 = 3(a + 5b + c)$.
 Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{a^3}{a + (a + b)^2} + \frac{a^2}{a + c^2}$.

Lời giải. Bằng các phép biến đổi giả thiết, ta có

$$\begin{aligned} 3(a + b + c) &= a^2 + 4b^2 + c^2 + 2ab + 12 - 12b \\ &= (a + b)^2 + c^2 + 3(b - 2)^2 \geq (a + b)^2 + c^2. \end{aligned}$$

Bằng biến đổi bất đẳng thức kết hợp cộng mẫu, ta được

$$3(a + b + c) \geq (a + b)^2 + c^2 \geq \frac{(a + b + c)^2}{2}.$$

Do đó $a + b + c \leq 6$ suy ra $(a + b)^2 + c^2 \leq 18$. Khi đó, bằng các phép biến đổi ta có

$$\begin{aligned} T &= \frac{a^3}{a + (a + b)^2} + \frac{a^2}{a + c^2} \geq \frac{a^2}{a + (a + b)^2} + \frac{a^2}{a + c^2} \\ &\geq \frac{4a^2}{2a + (a + b)^2 + c^2} \\ &\geq \frac{4a^2}{2a + 18} = \frac{2a^2}{a + 9} \geq \frac{2a^2}{10a} = \frac{a}{5} \geq \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Từ đây ta được $\min T = \frac{1}{5}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $(a, b, c) = (1, 2, 3)$.

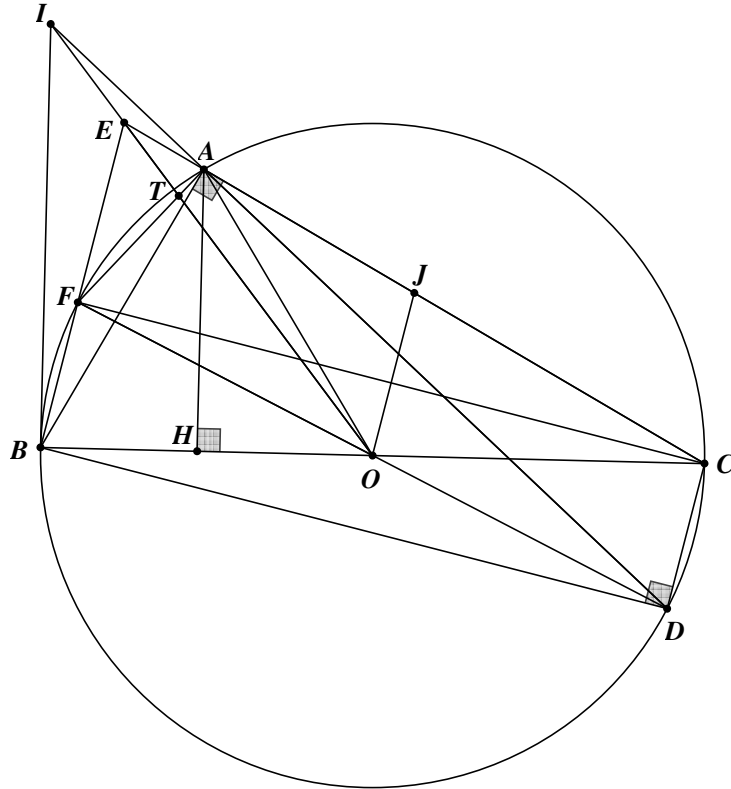
Vậy giá trị nhỏ nhất của $T = \frac{1}{5}$.

▽

Câu 4 Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O . Trên đường tròn (O) lấy điểm D khác phía A so với đường thẳng BC ($BD > AC$). Qua B kẻ đường thẳng d song song với CD . Đường thẳng d cắt đường thẳng AC tại E , cắt đường tròn (O) tại F (F khác B).

- a) Gọi J là trung điểm của EC . Chứng minh rằng 4 điểm A, F, O, J cùng nằm trên một đường tròn.
- b) Đường thẳng OE cắt đường thẳng AD tại I . Chứng minh rằng $\widehat{IBA} = \widehat{BDA}$.
- c) Trên tia BD lấy điểm M sao cho $BM = BA$. Đường thẳng AM cắt đường thẳng DC tại N , đường thẳng BN cắt (O) tại K (K khác B). Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC . Đường thẳng BD cắt các đường thẳng NH, CK lần lượt tại P, Q .
Chứng minh rằng $\frac{1}{PM} = \frac{1}{MQ} + \frac{1}{BM}$.

Lời giải.



- a) Vì tứ giác $AFBC$ nội tiếp, ta có đẳng thức sau

$$180^\circ - \widehat{FAJ} = \widehat{EAF} = \widehat{FBC} = \frac{1}{2}\widehat{FOC}.$$

Vì JO là đường trung bình tam giác CBE nên $JO \parallel BF$ mà $CF \perp BF$ suy ra $JO \perp BF$.
Vì O thuộc trung trực CF nên OJ là trung trực CF nên

$$\widehat{FOJ} = \frac{1}{2}\widehat{FOC} = 180^\circ - \widehat{FAJ}.$$

Từ đây ta có ngay tứ giác $AJOF$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi T là giao điểm của OE và AF . Trước hết, ta chỉ ra $\frac{ID}{IA} = \frac{BD^2}{BA^2}$.

Thật vậy, áp dụng định lý Menelaus cho tam giác AFD , cát tuyến ITO ta có.

$$\frac{ID}{IA} \cdot \frac{TA}{TF} \cdot \frac{OF}{OD} = 1$$

Từ đây kết hợp $OF = OD$, $\triangle AEB \sim \triangle FEC(g.g)$ và $BD = CF$, ta có

$$\frac{ID}{IA} = \frac{TF}{TA} = \frac{EF \cdot \sin FET}{EA \cdot \sin AET} = \frac{EF}{EA} \cdot \frac{\sin BEO}{\sin CEO} = \frac{EF}{EA} \cdot \frac{CE}{BE} = \left(\frac{CF}{BA}\right)^2 = \left(\frac{BD}{BA}\right)^2.$$

Bằng các phép biến đổi góc, ta được

$$\widehat{OFA} = \widehat{OAF} = 90^\circ - \widehat{ADF} = 90^\circ - \widehat{ACF} = \widehat{AEF}.$$

Do đó OF và OA là hai tiếp tuyến của đường tròn (AEF) .

Gọi I' là giao điểm của tiếp tuyến tại B của (O) với AD , ta có.

$$\begin{aligned} \triangle I'BA \sim \triangle I'DB(g.g) &\Rightarrow \frac{I'A}{I'B} = \frac{I'B}{I'D} = \frac{BA}{BD} \\ &\Leftrightarrow \frac{I'D}{I'A} = \frac{I'D}{I'B} \cdot \frac{I'B}{I'A} = \frac{BD^2}{BA^2} = \frac{ID}{IA} \\ &\Rightarrow I \equiv I'. \end{aligned}$$

Từ đây ta được IB là tiếp tuyến của (O) suy ra $\widehat{IBA} = \widehat{BDA}$.

Bài toán được chứng minh.

c) Ta có

$$\widehat{DNM} + \widehat{DMN} = \widehat{BAM} + \widehat{CAN} = 90^\circ, \widehat{BAM} = \widehat{BMA}$$

do đó $\widehat{CAN} = \widehat{CNA}$ hay tam giác CAN cân tại C suy ra $CA = CN$.

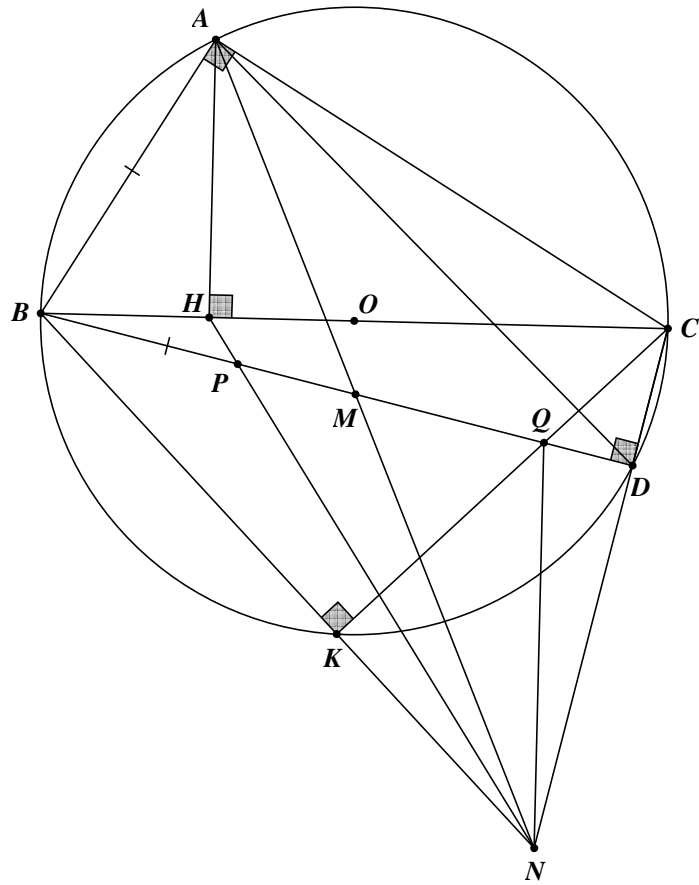
Theo hệ thức lượng ta có $CA^2 = CH \cdot CB$ nên $CN^2 = CH \cdot CB$ suy ra $\frac{CN}{CH} = \frac{CB}{CN}$.

Từ đây ta được $\triangle CNH \sim \triangle CBN(c.g.c)$ dẫn đến $\widehat{CHN} = \widehat{CNB} = \widehat{CQD}$.

Do đó tứ giác $CQPH$ nội tiếp, ta có các biến đổi sau

$$\begin{aligned} BP \cdot BQ &= BH \cdot BC = BA^2 \Leftrightarrow BM^2 = BP \cdot BQ \\ &\Leftrightarrow \frac{BM}{BP} = \frac{BQ}{BM} \\ &\Leftrightarrow \frac{PM}{BP} = \frac{MQ}{BQ} \\ &\Leftrightarrow PM \cdot BQ = MQ \cdot BM \\ &\Leftrightarrow (MB + MQ)MP = MQ \cdot MB \\ &\Leftrightarrow \frac{MB + MQ}{MB \cdot MQ} = \frac{1}{MP} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{MP} = \frac{1}{MQ} + \frac{1}{MB}. \end{aligned}$$

Vậy bài toán được chứng minh.



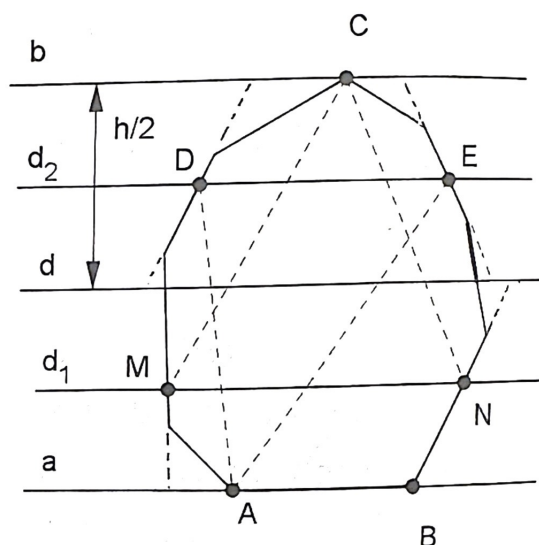
Câu 5 Cho một đa giác lồi có diện tích bằng 2024cm^2 . Chứng minh rằng bao giờ cũng vẽ được trong đa giác đó một tam giác có diện tích không nhỏ hơn 759cm^2 .

Lời giải. Bài toán ta cần cần giải quyết tương đương bài toán tổng quát sau.

Cho một đa giác lồi có diện tích bằng S . Chứng minh rằng bao giờ cũng vẽ được trong đa giác đó một tam giác có diện tích không nhỏ hơn $\frac{3}{8}S$.

Gọi a là đường thẳng chứa cạnh AB của đa giác. Gọi C là đỉnh của đa giác cách xa AB nhất. Qua C kẻ đường thẳng $b \parallel a$.

Kẻ đường thẳng d song song cách đều a và b , kẻ đường thẳng d_1 song song cách đều a và d , kẻ đường thẳng d_2 song song cách đều b và d . Gọi h là khoảng cách giữa a và b .



Gọi giao điểm của d_1 với biên của đa giác là M và N . Kéo dài các cạnh của đa giác chứa M và N cho cắt a và d , ta được một hình thang có diện tích bằng $MN \cdot \frac{h}{2}$.

Gọi giao điểm của d_2 với biên của đa giác là D và E . Kéo dài các cạnh của đa giác chứa D và E cho cắt b và d , ta được một hình thang (có thể là tam giác) có diện tích bằng $DE \cdot \frac{h}{2}$.

Hai hình thang nói trên phủ toàn bộ đa giác nên tổng các diện tích của hai hình thang lớn hơn hoặc bằng S , do đó: $(MN + DE) \cdot \frac{h}{2} \geq S$.

Ta sẽ chứng minh rằng một trong hai tam giác ADE và CMN là tam giác phải tìm. Xét tổng diện tích hai tam giác đó:

$$\begin{aligned} S_{ADE} + S_{CMN} &= \frac{1}{2}DE \cdot \frac{3h}{4} + \frac{1}{2}MN \cdot \frac{3h}{4} = \frac{3h}{8}(DE + MN) \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{h}{2}(DE + MN) \geq \frac{3}{4}S. \end{aligned}$$

Tồn tại một trong hai tam giác ADE , CMN có diện tích lớn hơn hoặc bằng $\frac{3}{8}S$ đó là tam giác cần tìm. Vậy bài toán được chứng minh. ∇