SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ ĐÀ NẴNG

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN
NĂM HỌC 2020 – 2021
Môn: TOÁN (chuyên)
Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Chứng minh rằng với mọi giá trị dương, khác 1 của x thì biểu thức A không nhận giá trị nguyên, với:

$$A=\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)\left(\frac{1}{4\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{4}\right)-\frac{3}{x-2\sqrt{x}+9}$$

b) Xét các bộ $(x;y;z)$ thỏa mãn $\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ với a, b, c là các số thực khác 0.

Tính giá trị của biểu thức: $Q=\frac{x^{2020}}{b^2c^2}+\frac{y^{2020}}{c^2a^2}+\frac{z^{2020}}{a^2b^2}$.

Câu 2. (1,0 điểm) Trên đồ thị hàm số $y=-0,5x^2$, cho điểm M có hoành độ dương và điểm N có hoành độ âm. Đường thẳng MN cắt trục Oy tại C với O là gốc tọa độ. Viết phương trình đường thẳng OM khi C là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN.

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình: $3x^3-x^2+2x-28+\left(x^3-4\right)\sqrt{x^3-7}=0$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}3x+4xy-x^2=3y(y+3)\\ \sqrt{x^2-6y+1}+\sqrt{y^2-2x+9}=\frac{8}{3}\end{cases}\cdot$

Câu 4. (1,0 điểm) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình:

$$\left(2x^2+x-m^2+2m-15\right)\left(2x^2+3x-m^2+2m-14\right)=0$$

có bốn nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=3x_2x_3$.

Câu 7. (2,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn $\left(\widehat{B}\neq\widehat{C}\right)$, nội tiếp đường tròn tâm O. Các đường cao xuất phát từ B và C lần lượt cắt đường thẳng AO lần lượt tại D và E. Gọi H là trực tâm giác ABC và O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HDE. Chứng minh rằng:

a) Tam giác HDE đồng dạng với tam giác ABC và AH là tiếp tuyến của (O').

b) Đường thẳng AO' đi qua trung điểm của đoạn BC.

Câu 6. (1,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn $(AB\neq AC)$, nội tiếp đường tròn tâm O. Kẻ đường phân giác AD, $(D\in BC)$ của tam giác đó. Lấy điểm E đối xứng với D qua trung điểm của đoạn BC. Đường thẳng vuông góc với BC tại D cắt AO ở H, đường thẳng vuông góc với BC tại E cắt ở AD tại K. Chứng minh rằng tứ giác $BHCK$ nội tiếp.

Câu 7. (1,0 điểm) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z\leq 3$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{xy(x+y)}}+\sqrt{\frac{y^2+z^2}{yz(y+z)}}+\sqrt{\frac{z^2+x^2}{zx(z+x)}}+3\leq\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{x+y}{xy}}+\sqrt{\frac{y+z}{yz}}+\sqrt{\frac{z+x}{zx}}\right).$$

---------------------- **HẾT** ----------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ ĐÀ NẴNG

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN
NĂM HỌC 2020 – 2021
Môn: TOÁN (chuyên)
Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1.

a) Với $x>0$ và $x\neq 1,$ ta có:

$$A=\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)\left(\frac{1}{4\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{4}\right)-\frac{3}{x-2\sqrt{x}+9}$$
$$=\left[\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2-\left(\sqrt{x}+1\right)^2}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}\right]\cdot\frac{1-x}{4\sqrt{x}}-\frac{1}{x-2\sqrt{x}+9}\qquad s$$
$$=\frac{-4\sqrt{x}}{x-1}\cdot\frac{1-x}{4\sqrt{x}}-\frac{1}{x-2\sqrt{x}+9}=1-\frac{1}{x-2\sqrt{x}+9}.$$

Vậy $A=1-\dfrac{1}{x-2\sqrt{x}+9}.$

Nếu $A\in\mathbb{Z}$ thì $1\vdots\left(x-2\sqrt{x}+9\right)$ mà: $x-2\sqrt{x}+9=\left(\sqrt{x}-1\right)^2+8>1$ nên A không thể là số nguyên.

b) Ta có: $\dfrac{x^2}{a^2}\geq\dfrac{x^2}{a^2+b^2+c^2},\ \dfrac{y^2}{b^2}\geq\dfrac{y^2}{a^2+b^2+c^2}$ và $\dfrac{z^2}{c^2}\geq\dfrac{z^2}{a^2+b^2+c^2}.$

Từ đó suy ra: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\geq\dfrac{x^2}{a^2+b^2+c^2}+\dfrac{y^2}{a^2+b^2+c^2}+\dfrac{z^2}{a^2+b^2+c^2}=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}.$

Do đó đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=0.$

Từ đó $Q=0.$

Câu 2.

Ta gọi: $M\left(m;-0,5m^2\right),\ N\left(n;-0,5n^2\right),\ C\left(x_C;y_C\right)$ trong đó $m>0.$

Do C là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN mà $C\in MN$ nên tam giác OMN vuông tại O và C là trung điểm $MN.$ Khi đó $\begin{cases}x_C=\dfrac{m+n}{2}\\ y_C=\dfrac{-0,5m^2-0,5n^2}{2}\end{cases}.$

Ta có: $C\in Oy$ nên $x_C=0$ suy ra $m=-n.$ Khi đó $C\left(0;-\dfrac{m^2}{2}\right).$ Suy ra: $OC=\dfrac{m^2}{2},\ OM=m.$

Mặt khác C là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN nên:

$$OC=OM\Leftrightarrow\frac{m^2}{2}=m\Leftrightarrow m=2\ \text{do}\ m>0.$$

Suy ra $M\left(2;-2\right).$ Phương trình đường thẳng OM có dạng $y=ax$ mà đi qua điểm $M\left(2;-2\right)$ nên $a=-1.$

Vậy $y=-x$ là đường thẳng cần tìm.

Câu 3.

a) Điều kiện: $x \ge \sqrt[3]{7}$. Ta có phương trình tương đương:

$$x^2(x-1)+(2x^3+2x-28)+(x^3-4)\sqrt{x^3-7}=0$$

Nhận xét $x=2$ là một nghiệm của phương trình.

Nếu $x>2$, ta có: $x^2(x-1)+(2x^3+2x-28)+(x^3-4)\sqrt{x^3-7}>0$.

Nếu $\sqrt[3]{7} \le x < 2$, ta có: $x^2(x-1)+(2x^3+2x-28)+(x^3-4)\sqrt{x^3-7}<0$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$.

b) Điều kiện $\begin{cases} x^2-6y+1 \ge 0 \\ y^2-2x+9 \ge 0 \end{cases}$. Phương trình thứ nhất của hệ tương đương:

$$\begin{aligned} & x^2-4xy+3y^2-3(x-3y)=0 \\ & \Leftrightarrow (x-3y)(x-y)-3(x-3y)=0 \\ & \Leftrightarrow (x-3y)(x-y-3)=0 \\ & \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3y \\ x=y+3 \end{array}\right. . \end{aligned}$$

- Với $x=3y$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\begin{aligned} & \sqrt{9y^2-6y+1}+\sqrt{y^2-6y+9}=\frac{8}{3} \\ & \Leftrightarrow |3y-1|+|y-3|=\frac{8}{3} \end{aligned}$$

Nếu $y \ge 3$ thì $|3y-1|+|y-3| \ge 8 > \frac{8}{3}$.

Nếu $y \le \frac{1}{3}$ thì phương trình tương đương: $1-3y+3-y=\frac{8}{3} \Leftrightarrow y=\frac{1}{3} \Rightarrow x=1$.

Nếu $\frac{1}{3}<y<3$ thì phương trình tương đương: $3y-1+3-y=\frac{8}{3} \Leftrightarrow y=\frac{1}{3}$ không thỏa do $\frac{1}{3}<y<3$.

- Với $x=y+3$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(y+3)^2-6y+1}+\sqrt{y^2-2(y+3)+9}=\frac{8}{3} \\ & \Leftrightarrow \sqrt{y^2+10}+\sqrt{y^2-2y+3}=\frac{8}{3} \\ & \Leftrightarrow \sqrt{y^2+10}+\sqrt{(y-1)^2+2}=\frac{8}{3} \end{aligned}$$

Ta có $\sqrt{y^2+10}+\sqrt{(y-1)^2+2} \ge \sqrt{10}+\sqrt{2} > 3+1=4>\frac{8}{3}$ nên phương trình này vô nghiệm.

Vậy hệ cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(1;\frac{1}{3}\right)$.

Câu 4.

Phương trình tương đương: $\left[\begin{array}{ll}2x^2+x-m^2+2m-15=0 & (1)\\ 2x^2+3x-m^2+2m-14=0 & (2)\end{array}\right.$.

Phương trình (1) có $ac=2\left(-m^2+2m-15\right)=-2(m-1)^2-28<0$ nên có hai nghiệm phân biệt trái dấu.

Tương tự phương trình (2) cũng có hai nghiệm phân biệt trái dấu.

Mà $3x_2x_3=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2>0$ nên x_2 và x_3 cùng dấu. Không mất tính tổng quát, giả sử $x_1,\ x_2$ là nghiệm của phương trình (1) và $x_3,\ x_4$ là nghiệm của phương trình (2).

Theo định lý Viete, ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{1}{2}\\ x_1x_2=-\dfrac{m^2-2m+15}{2}\end{cases}$ và $\begin{cases}x_3+x_4=-\dfrac{3}{2}\\ x_3x_4=-\dfrac{m^2-2m+14}{2}\end{cases}$.

Khi đó

$$\begin{aligned}x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2&=(x_1+x_2)^2+(x_3+x_4)^2-2x_1x_2-2x_3x_4\\ &=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2-2\left(-\frac{m^2-2m+15}{2}\right)-2\left(-\frac{m^2-2m+14}{2}\right)\\ &=2m^2-4m+\frac{63}{2}=\frac{8m^2-16m+126}{4}=\frac{\left(8m^2-16m+121\right)+5}{4}\\ &=\frac{a+5}{4}\ \left(a=8m^2-16m+121\right).\end{aligned}$$

Chú ý rằng phương trình (1) và phương trình (2) có cùng:

$$\Delta=1-4\cdot2\left(-m^2+2m-15\right)=9-4\cdot2\left(-m^2+2m-14\right)=8m^2-16m+121=a>1.$$

Phương trình (1) có hai nghiệm $x=\dfrac{-1+\sqrt{a}}{4}$ hoặc $x=\dfrac{-1-\sqrt{a}}{4}$.

Phương trình (2) có hai nghiệm $x=\dfrac{-3+\sqrt{a}}{4},\ x=\dfrac{-3-\sqrt{a}}{4}$.

Xét trường hợp $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{a}}{4},\ x_2=\dfrac{-1+\sqrt{a}}{4},\ x_3=\dfrac{-3+\sqrt{a}}{4},\ x_4=\dfrac{-3-\sqrt{a}}{4}$.

Ta có: $x_2x_3=\dfrac{a-4\sqrt{a}+3}{16}$. Yêu cầu bài toán tương đương:

$$\begin{aligned}&\frac{a+5}{4}=\frac{3\left(a-4\sqrt{a}+3\right)}{16}\Leftrightarrow 4(a+5)-3\left(a-4\sqrt{a}+3\right)=0\\ &\Leftrightarrow a+12\sqrt{a}+11=0\end{aligned}$$

Phương trình này vô nghiệm.

Xét trường hợp $x_1=\dfrac{-1+\sqrt{a}}{4},\ x_2=\dfrac{-1-\sqrt{a}}{4},\ x_3=\dfrac{-3-\sqrt{a}}{4},\ x_4=\dfrac{-3+\sqrt{a}}{4}$.

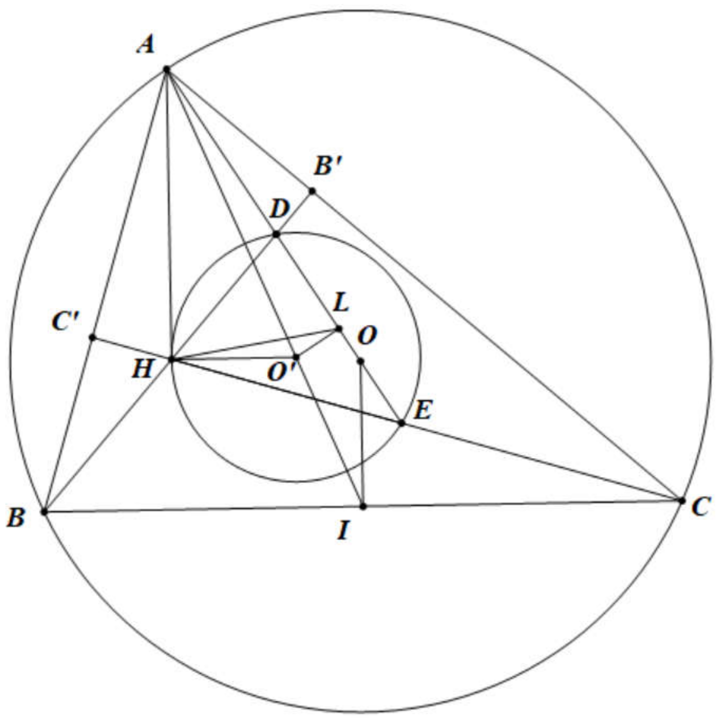
Ta có: $x_2x_3 = \dfrac{a+4\sqrt{a}+3}{4}$. Yêu cầu bài toán tương đương:

$$\begin{aligned}
&\frac{a+5}{4} = \frac{3\left(a+4\sqrt{a}+3\right)}{16} \Leftrightarrow 4(a+5)-3\left(a+4\sqrt{a}+3\right)=0\\
&\Leftrightarrow a-12\sqrt{a}+11=0 \Leftrightarrow \sqrt{a}=11\ (a>1)\\
&\Leftrightarrow a=121.
\end{aligned}$$

Với $a=121$, ta có: $8m^2-16m+121=121 \Leftrightarrow m^2-2m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} m=0 \\ m=2 \end{matrix}\right.$.

Vậy $m=0$ hoặc $m=2$ là các trị cần tìm.

Câu 5.



a) Gọi BB' và CC' là đường cao của tam giác ABC.

Tứ giác $AC'HB'$ nội tiếp nên $\widehat{C'HB} = \widehat{C'AB'} = \widehat{BAC}$ do cùng bù với góc $\widehat{C'HB'}$.

Mà $\widehat{C'HB} = \widehat{DHE}$ nên $\widehat{DHE} = \widehat{BAC}$ (1).

Tam giác OAC cân tại O nên $\widehat{OAC} = 90^0 - \dfrac{\widehat{AOC}}{2} = 90^0 - \widehat{ABC} = \widehat{BAH}$.

Mặt khác $\Delta C'AE$ vuông tại C' nên $\widehat{C'AE} + \widehat{AEC'} = 90^0$ hay $\widehat{DEH} + \widehat{BAE} = 90^0$.

Suy ra $\widehat{DEH} = 90^0 - \widehat{BAE} = 90^0 - \left(\widehat{BAH} + \widehat{HAE}\right) = 90 - \left(\widehat{OAC} + \widehat{HAE}\right) = 90^0 - \widehat{HAC} = \widehat{ACB}$.

Do đó $\widehat{DEH} = \widehat{ACB}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra tam giác HDE đồng dạng với tam giác ABC.

Ta có $\widehat{DEH} = \widehat{ACB} = 90^0 - \widehat{HAC} = \widehat{AHB'}$ nên HA là tiếp tuyến của (O').

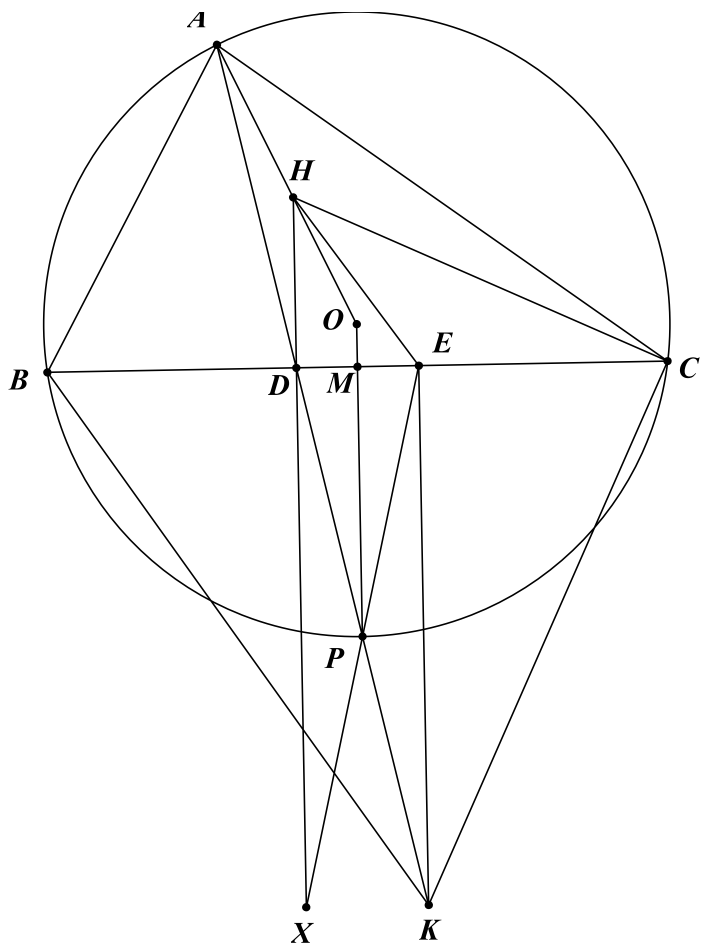
b) Gọi I, L lần lượt là trung điểm của BC và DE. Mà tam giác HDE đồng dạng với tam giác ABC mà O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HDE, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên hai tam giác LHO' và IAO đồng dạng với nhau nên $\widehat{LHO'} = \widehat{IAO}$ (3).

Ta có $O'L \perp DE$ và $AH \perp HO'$ nên tứ giác $AHO'L$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{LHO'} = \widehat{LAO'}$ hay $\widehat{LHO'} = \widehat{O'AO}$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra: $\widehat{IAO} = \widehat{O'AO}$ hay A, O', I thẳng hàng.

Do đó AO' đi qua trung điểm của BC.

Câu 6.



Gọi P là giao điểm của AD và (O) thì P là điểm chính giữa cung BC, X là giao điểm của EP và DH.

Ta có OP là trung trực của DE nên $OP \parallel DH$ dẫn đến $\widehat{DAH} = \widehat{APO} = \widehat{ADH}$ do đó ΔAHD cân tại H.

Do M là trung điểm của DE mà $MP \parallel EK \parallel DX$ nên P là trung điểm của DK và EX.

Nên $DEKX$ là hình bình hành, suy ra $\Delta BDX = \Delta CEK \Rightarrow \widehat{XBD} = \widehat{KCE}$.

Mà $\widehat{DEX} = 90^0$ nên $DP = DX = DE$.

Ta có: $XK \parallel BC$ nên $BKXC$ là hình thang cân nội tiếp đường tròn (1).

Ngoài ra tứ giác $AHPX$ nội tiếp do $\widehat{AHD} = \widehat{APX} \Rightarrow DH \cdot DX = DA \cdot DP$.

Mặt khác tứ giác $ABPC$ nội tiếp nên $DA \cdot DP = DB \cdot DC$.

Suy ra $DH \cdot DX = DB \cdot DC$ hay $BHCX$ nội tiếp (2).

Từ (1) và (2) suy ra $BHCK$ là tứ giác nội tiếp.

Câu 7.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwars, ta có:

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{xy(x+y)}}+\sqrt{\frac{2}{x+y}}\le\sqrt{2\left(\frac{x^2+y^2}{xy(x+y)}+\frac{2}{x+y}\right)}=\sqrt{\frac{2(x+y)^2}{xy(x+y)}}=\sqrt{\frac{2(x+y)}{xy}}$$

Viết hai bất đẳng thức tương tự rồi công lai theo vế ta được:

$$\sum\sqrt{\frac{x^2+y^2}{xy(x+y)}}+\sum\sqrt{\frac{2}{x+y}}\le\sqrt{2}\cdot\sum\sqrt{\frac{(x+y)}{xy}}$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức sau là bài toán hoàn tất.

$$\sqrt{\frac{2}{x+y}}+\sqrt{\frac{2}{y+z}}+\sqrt{\frac{2}{z+x}}\ge 3$$

Thật vậy, ta có: $\sqrt{\frac{2}{x+y}}=\frac{4}{2\sqrt{2(x+y)}}\ge\frac{4}{2+x+y}$.

Do đó: $\sum\sqrt{\frac{2}{x+y}}\ge 4\left(\frac{1}{x+y+2}+\frac{1}{y+z+2}+\frac{1}{z+x+2}\right)\ge\frac{4\cdot 9}{2(x+y+z)+6}\ge\frac{4\cdot 9}{2\cdot 3+6}=3.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

---------------------- **HẾT** ----------------------