

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Đề thi có 01 trang)

Môn thi: Toán (môn chuyên)

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 27/5/2023

Câu 1. (2,0 điểm)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+4\sqrt{x}+4}{x+\sqrt{x}-2} + \frac{x+\sqrt{x}}{1-x} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right)$ (với $x > 0; x \neq 1$).

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để $A \geq \frac{1+\sqrt{2023}}{\sqrt{2023}}$.

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 & (1) \\ 2x^2 + y^2 - 3xy + 3x - 2y + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

b) Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $(d): y = -x + m + 1$ cắt parabol $(P): y = x^2$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1^2 - x_2 - 4m + 1 = 0$.

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $(2x + y)(x - y) + x + 8y = 22$.

b) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$.

Chứng minh rằng $\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}} + \frac{bc}{\sqrt{a^2+3}} + \frac{ca}{\sqrt{b^2+3}} \leq \frac{3}{2}$.

Câu 4. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A . Trên cạnh AC lấy điểm F , vẽ FE vuông góc với BC tại E . Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác CEF . Đường thẳng BF cắt (O) tại điểm thứ hai là D , DE cắt AC tại H .

a) Chứng minh $ABEF$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $FH \cdot CA = CH \cdot FA$.

c) Đường thẳng AD cắt (O) tại điểm thứ hai là G , FG cắt CD tại I , CG cắt FD tại K . Chứng minh K, I, H thẳng hàng.

Câu 5. (1,0 điểm) Cho hình vuông $ABCD$ và 2025 đường thẳng, biết mỗi đường thẳng đều thỏa hai mãn điều kiện:

i) luôn cắt hai cạnh đối diện và không đi qua đỉnh nào của hình vuông.

ii) chia hình vuông thành hai phần có tỉ số diện tích bằng $\frac{1}{2}$.

Chứng minh rằng trong 2025 đường thẳng đó có ít nhất 507 đường thẳng cùng đi qua một điểm.

----- Hết -----

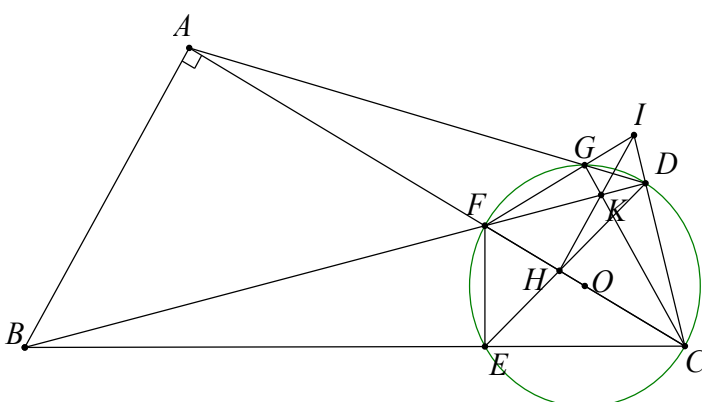
UBND TỈNH LAI CHÂU
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

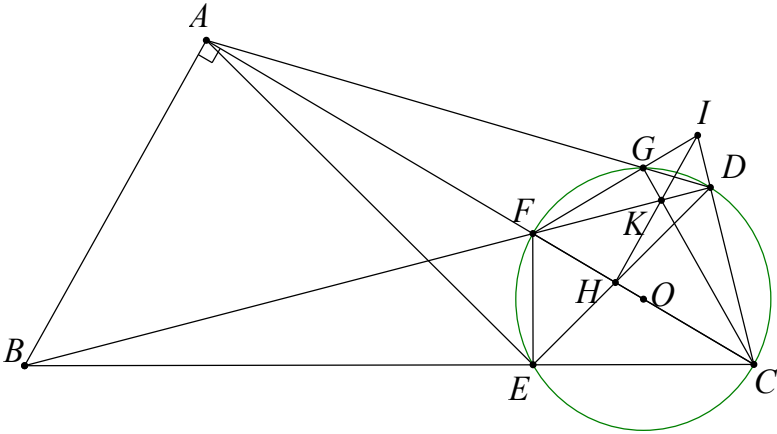
HƯỚNG DẪN CHẤM
ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
NĂM HỌC 2023-2024
Môn thi: Toán

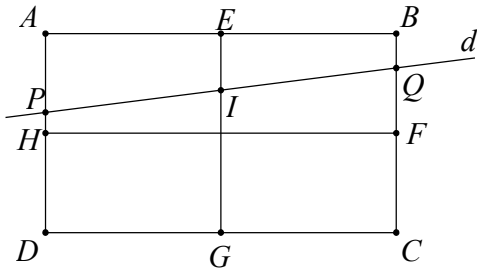
Câu	Đáp án	Điểm
1.a.		1,0
	$A = \left(\frac{x+4\sqrt{x}+4}{x+\sqrt{x}-2} + \frac{x+\sqrt{x}}{1-x} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right)$ $= \left[\frac{(\sqrt{x}+2)^2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} \right] : \frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$ $= \left[\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right] : \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$ $= \frac{2}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ Vậy $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 1$	
1.b.		1,0
	$A \geq \frac{1+\sqrt{2023}}{\sqrt{2023}}$ $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \geq \frac{1+\sqrt{2023}}{\sqrt{2023}}$ $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - \frac{1+\sqrt{2023}}{\sqrt{2023}} \geq 0$ $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{2023} + \sqrt{2023} - \sqrt{x} - \sqrt{x} \cdot \sqrt{2023}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{2023}} \geq 0$ $\Leftrightarrow \sqrt{2023} - \sqrt{x} \geq 0$ $\Leftrightarrow \sqrt{x} \leq \sqrt{2023}$ $\Leftrightarrow x \leq 2023$ $\Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2023$ Kết hợp với đk $x > 0, x \neq 1$ có 2022 giá trị thỏa mãn điều kiện	
2. a.		1,0

	$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 & (1) \\ 2x^2 + y^2 - 3xy + 3x - 2y + 1 = 0 & (2) \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ (x - y + 1)(2x - y + 1) = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ \begin{cases} x = y - 1 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 & (*) \\ x = y - 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 & (**) \\ y = 2x + 1 \end{cases} \end{cases}$ Giải (*) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ x = y - 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = y - 1 \\ ((y - 1)^2 + y^2 + (y - 1) + y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 1 \\ 2y^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 1 \\ \begin{cases} y = 2 \\ y = -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases} \end{cases}$ Giải (**) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 \\ x^2 + (2x + 1)^2 + x + (2x + 1) = 8 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 \\ 5x^2 + 7x + 2 = 8 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 \\ 5x^2 + 7x - 6 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 1 \\ \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ x = -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} y = 2x + 1 \\ x = \frac{3}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} y = 2x + 1 \\ x = -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = \frac{11}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases} \end{cases}$ Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm $(1; 2); (-3; -2); (-2; -3); \left(\frac{3}{5}; \frac{11}{5}\right)$	
2. b.		1,0
	Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d): $x^2 = -x + m + 1$ $\Leftrightarrow x^2 + x - m - 1 = 0 (*)$	

	Đề (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt $x_1; x_2$ thì (*) có 2 nghiệm phân biệt $\Rightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 1 + 4(m+1) > 0 \Leftrightarrow 4m + 5 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{5}{4}$ Ta có: $x_1^2 - x_2 - 4m + 1 = 0$ (1) Vì x_1 là nghiệm của (*) $\Rightarrow x_1^2 = -x_1 + m + 1$ thay vào (1) ta được $-x_1 + m + 1 - x_2 - 4m + 1 = 0$ $\Leftrightarrow -(x_1 + x_2) - 3m + 2 = 0$ Theo Viet ta có: $x_1 + x_2 = -1 \Rightarrow 1 - 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ (Nhận). Vậy $m = 1$	
3. a.		1
	a) $(2x + y)(x - y) + x + 8y = 22$ $\Leftrightarrow (2x + y)(x - y) + 3(2x + y) - 5(x - y) = 22$ $\Leftrightarrow (2x + y)(x - y + 3) - 5(x - y + 3) = 7$ $\Leftrightarrow (x - y + 3)(2x + y - 5) = 7$ Khi đó ta có các khả năng sau: KN1: $\begin{cases} x - y + 3 = -7 \\ 2x + y - 5 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 8 \end{cases}$ KN2: $\begin{cases} x - y + 3 = -1 \\ 2x + y - 5 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$ KN3: $\begin{cases} x - y + 3 = 7 \\ 2x + y - 5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{3} \\ y = \frac{-2}{3} \end{cases} (L)$ KN4: $\begin{cases} x - y + 3 = 1 \\ 2x + y - 5 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{3} \\ y = \frac{16}{3} \end{cases} (L)$ Vậy nghiệm nguyên của phương trình là $(x; y) \in \{(-2; 8); (-2; 2)\}$	
3.b.		1
	Ta có: $a + b + c = 3$ $3^2 = (a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ac) \Leftrightarrow ab + bc + ac \leq 3$ Ta có: $\frac{bc}{\sqrt{a^2 + 3}} \leq \frac{bc}{\sqrt{a^2 + ab + bc + ac}} = \frac{bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{bc}{a+b} + \frac{bc}{a+c} \right)$ Tương tự ta có: $\frac{ac}{\sqrt{b^2 + 3}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{ac}{a+b} + \frac{ac}{b+c} \right)$	

	$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{ab}{b+c} + \frac{ab}{a+c} \right)$ Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta được: $\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}} + \frac{bc}{\sqrt{a^2+3}} + \frac{ac}{\sqrt{b^2+3}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{bc}{a+b} + \frac{bc}{a+c} + \frac{ac}{a+b} + \frac{ac}{b+c} + \frac{ab}{b+c} + \frac{ab}{a+c} \right)$ $\Leftrightarrow \frac{ab}{\sqrt{c^2+3}} + \frac{bc}{\sqrt{a^2+3}} + \frac{ac}{\sqrt{b^2+3}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{bc}{a+b} + \frac{ac}{a+b} + \frac{bc}{a+c} + \frac{ab}{a+c} + \frac{ac}{b+c} + \frac{ab}{b+c} \right)$ $\Leftrightarrow \frac{ab}{\sqrt{c^2+3}} + \frac{bc}{\sqrt{a^2+3}} + \frac{ac}{\sqrt{b^2+3}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{c(a+b)}{a+b} + \frac{b(a+c)}{a+c} + \frac{a(b+c)}{b+c} \right)$ $\Leftrightarrow \frac{ab}{\sqrt{c^2+3}} + \frac{bc}{\sqrt{a^2+3}} + \frac{ac}{\sqrt{b^2+3}} \leq \frac{1}{2} (a+b+c)$ Mà $a+b+c=3$ nên $\Leftrightarrow \frac{ab}{\sqrt{c^2+3}} + \frac{bc}{\sqrt{a^2+3}} + \frac{ac}{\sqrt{b^2+3}} \leq \frac{3}{2}$ Dấu = xảy ra khi $a=b=c=1$ Vậy $\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}} + \frac{bc}{\sqrt{a^2+3}} + \frac{ac}{\sqrt{b^2+3}} \leq \frac{3}{2}$	
4.a.		1
	 a. Chứng minh rằng: $ABEF$ là tứ giác nội tiếp. Tam giác ABC vuông tại A nên $\widehat{BAC} = 90^\circ$ hay $\widehat{BAF} = 90^\circ$ Ta có: $FE \perp BC$ tại E nên $\widehat{FEB} = \widehat{FEC} = 90^\circ$ Xét tứ giác $ABEF$ có: $\widehat{BAF} + \widehat{FEB} = 180^\circ$ mà hai góc đối nhau Nên $ABEF$ là tứ giác nội tiếp.	
4.b.		1
	b. Chứng minh: $FH.CA = CH.FA$	

	 Xét đường tròn tâm (O) có $\widehat{FDC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) Hay $\widehat{BDC} = 90^\circ$ Xét tứ giác $ABCD$ có: $\widehat{BAC} = \widehat{BDC} = 90^\circ$ mà hai đỉnh kề Nên $ABCD$ là tứ giác nội tiếp. Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$ có $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AD}$) Hay $\widehat{ABF} = \widehat{FCD}$ (1) Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABEF$ có $\widehat{ABF} = \widehat{AEF}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AF}$) (2) Xét đường tròn tâm (O) có $\widehat{FED} = \widehat{FCD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{DF}$) (3) Từ (1); (2); (3) ta có: $\widehat{AEF} = \widehat{FED}$ nên FE là tia phân giác của $\widehat{AED}$ Xét tam giác AEH có EF là đường phân giác trong của tam giác nên $\frac{AF}{FH} = \frac{AE}{EH}$ (4) EC là đường phân giác ngoài của tam giác nên $\frac{AC}{CH} = \frac{AE}{EH}$ (5) Từ (4); (5) ta có: $\frac{AF}{FH} = \frac{AC}{CH} \Rightarrow AF \cdot CH = FH \cdot AC$	
4.c.		1
	Đường thẳng AD cắt (O) tại điểm thứ hai là G, FG cắt CD tại I, CG cắt FD tại K. Chứng minh rằng $K; I; H$ thẳng hàng. Xét đường tròn tâm (O) có $\widehat{FGC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow CG \perp FI$ Xét tam giác $\triangle IFC$ có FD, CG là hai đường cao mà FD cắt CG tại K Nên K là trực tâm tam giác $\triangle IFC \Rightarrow IK$ là đường cao $\triangle IFC$ Do đó $IK \perp FC$ (6) Xét đường tròn tâm (O) có $\widehat{FDA} = \widehat{FCG}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{GF}$)	

	Mà $\widehat{FDA} = \widehat{BCA}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{AB}$ của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$) Do đó $\widehat{BCA} = \widehat{FCG}$ Hay $\widehat{FCE} = \widehat{FCG}$ Xét $\triangle FEC$ và $\triangle FGC$ có; $\widehat{FCE} = \widehat{FCG}$; $\widehat{FEC} = \widehat{FGC} = 90^\circ$ Nên $\triangle FEC \sim \triangle FGC (g.g) \Rightarrow \widehat{EFC} = \widehat{GFC}$ Do đó $\Rightarrow \widehat{GC} = \widehat{EC}$ Xét đường tròn tâm (O) có $\widehat{GFC} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{GC}$; $\widehat{EDC} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{EC}$ $\Rightarrow \widehat{GFC} = \widehat{EDC}$ hay $\widehat{IFH} = \widehat{HDC}$ Xét tứ giác $FHDI$ có: $\widehat{IFH} = \widehat{HDC}$ mà góc ngoài bằng góc trong tại đỉnh đối Nên $FHDI$ là tứ giác nội tiếp. $\Rightarrow \widehat{FHI} = \widehat{FDI} = 90^\circ \Rightarrow IH \perp FC (7)$ Từ (6) và (7) ta có $K; I; H$ thẳng hàng.	
5:		1
	Gọi d là đường thẳng trong 2025 đường thẳng thỏa mãn đề bài,  Giả sử d cắt AD và BC lần lượt tại P và Q và cắt EG tại I $E; F; G; H$ là trung điểm của các cạnh như hình Mà $S_{DCQP} = 2S_{ABQP} \Rightarrow (DP + QC) = 2(AP + BQ) \Leftrightarrow GI = 2.IE \Leftrightarrow GI = \frac{2}{3}GE \Rightarrow I$ cố định Khi đó ta có 2025 = 4.506 + 1 các đường thẳng thỏa mãn đề bài phải đi qua 4 điểm cố định Khi đó theo nguyên lý Dirichlet thì có 506 + 1 = 507 đường thẳng đi qua một điểm.	