

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình $x^2 + 3x + 5 = (x + 3)\sqrt{x^2 + 5}$.

b) Cho hai số thực a, b, c thỏa mãn $a + b - 2c = 0$ và $2ab - bc - ca = 0$. Chứng minh rằng $a = b = c$.

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Chứng minh với mọi số nguyên dương n , số $A = 11^n + 7^n - 2^n - 1$ chia hết cho 15.

b) Cho hai số nguyên dương m và n thỏa mãn $\sqrt{11} - \frac{m}{n} > 0$. Chứng minh rằng: $\sqrt{11} - \frac{m}{n} \geq \frac{3(\sqrt{11} - 3)}{mn}$.

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Cho đa thức $P(x)$ với hệ số thực thỏa mãn $P(1) = 3$ và $P(3) = 7$. Tìm đa thức dư trong phép chia đa thức $P(x)$ cho đa thức $x^2 - 4x + 3$.

b) Với a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c + abc = 4$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = ab + bc + ca.$$

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và $AB < AC$. Gọi (I) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC và K là tâm đường tròn bàng tiếp trong góc A của tam giác ABC . Gọi D, E, F lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ điểm I đến các đường thẳng BC, CA, AB . Đường thẳng AD cắt đường tròn (I) tại hai điểm phân biệt D và M . Đường thẳng qua K song song với đường thẳng AD cắt đường thẳng BC tại N .

a) Chứng minh rằng tam giác MFD đồng dạng với tam giác BNK .

b) Gọi P là giao điểm của BI và FD . Chứng minh góc BMF bằng góc DMP .

c) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác MBC đi qua trung điểm của đoạn thẳng KN .

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho một bảng ô vuông kích thước 6×7 (6 hàng, 7 cột) được tạo bởi các ô vuông kích thước 1×1 . Mỗi ô vuông kích thước 1×1 được tô bởi một trong hai màu đen hoặc trắng sao cho trong mọi bảng ô vuông kích thước 2×3 hoặc 3×2 , có ít nhất hai ô vuông kích thước 1×1 được tô màu đen có chung cạnh. Gọi m là số ô vuông kích thước 1×1 được tô màu đen trong bảng.

a) Chỉ ra một cách tô sao cho $m = 20$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của m .

Câu 1.

a) Phương trình đã cho luôn xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Đặt $a = \sqrt{x^2 + 5}$ ($a > 0$), khi đó phương trình có thể viết lại thành $a^2 + 3x = (x+3)a$, hay $(a-x)(a-3) = 0$.

Do $a = \sqrt{x^2 + 5} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x$ nên từ đây, ta có $a = 3$ hay $\sqrt{x^2 + 5} = 3$.

Từ đó, ta có $x = 2$ (thỏa mãn) hoặc $x = -2$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 2$ và $x = -2$.

b) Từ giả thiết thứ nhất và thứ hai, ta có: $2ab = c(a+b) = 2c^2$. Do đó $ab = c^2$.

Suy ra: $(a-c)(b-c) = ab - c(a+b) + c^2 = c^2 - 2c^2 + c^2 = 0$ (1).

Mà: $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab = (2c)^2 - 4c^2 = 0$ (2).

Từ (1) và (2), suy ra: $a = b = c$.

Câu 2.

a) Với mọi số nguyên a, b và số tự nhiên k ta có: $(a^k - b^k) : (a - b)$.

Suy ra: $a^k - b^k = (a - b)M$ với M là số nguyên.

Ta có: $A = (11^n - 2^n) + (7^n - 1^n) = 9C + 6D = 3(3C + 2D) : 3$ với C, D là số nguyên.

Lại có: $A = (11^n - 1^n) + (7^n - 2^n) = 10C + 5D = 5(2C + D) : 5$ với P, Q là số nguyên.

Suy ra $A : 15$.

b) Với mọi số nguyên a thì a^2 chia 11 dư 0, 1, 3, 4, 5, 9.

Ta có: $\sqrt{11} - \frac{m}{n} > 0 \Leftrightarrow 11n^2 - m^2 > 0$. Nếu $11n^2 - m^2 = 1$ thì $m^2 \equiv 10 \pmod{11}$, mâu thuẫn.

Suy ra: $11n^2 \geq m^2 + 2$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$\sqrt{11}n \geq m + \frac{3(\sqrt{11}-3)}{m} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 11n^2 \geq m^2 + 6(\sqrt{11}-3) + \frac{9(\sqrt{11}-3)^2}{m^2} \quad (2).$$

- Nếu $m \geq 3$ thì $VP_{(2)} \leq m^2 + 6(\sqrt{11} - 3) + (\sqrt{11} - 3)^2 = m^2 + 2 \leq 11n^2$. Bất đẳng thức (2) đúng.
- Nếu $m = 1$ thì (1) $\Leftrightarrow \sqrt{11}n \geq 3\sqrt{11} - 8 \Leftrightarrow \sqrt{11}n + 8 \geq 3\sqrt{11}$. Do $11n^2 \geq m^2 + 2 \Rightarrow n \geq \sqrt{\frac{3}{11}}$ nên (1) đúng.
- Nếu $m = 2$ thì (1) $\Leftrightarrow 2\sqrt{11}n \geq 3\sqrt{11} - 5$. Do $11n^2 \geq m^2 + 2 \Rightarrow n \geq \sqrt{\frac{6}{11}}$ nên (1) đúng.

Tóm lại trong mọi trường hợp ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $m = 3, n = 1$.

Câu 3.

a) Do $x^2 - 4x + 3$ có bậc là 2 nên số dư phép chia $P(x)$ cho $x^2 - 4x + 3$ có dư là $ax + b$.

Đặt $P(x) = (x^2 - 4x + 3)Q(x) + ax + b$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} P(1) = 3 \\ P(3) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ 3a + b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}.$$

Vậy đa thức dư cần tìm là $2x + 1$.

b) Ta chứng minh $ab + bc + ca \leq a + b + c + abc$. Thật vậy bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$1 - (a + b + c) \cdot 1^2 + (ab + bc + ca) \cdot 1 - abc \leq 1 \Leftrightarrow (1 - a)(1 - b)(1 - c) \leq 1.$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$.

Ta có: $4 = a + b + c + abc \geq 3c + c^3 \Rightarrow c \leq 1$. Ngoài ra $4 = a + b + c + abc \leq 3a + a^3 \Rightarrow a \geq 1$.

Khi đó $(1 - a)(1 - c) \leq 0$.

- Nếu $b \leq 1 \Rightarrow 1 - b \geq 0$. Khi đó $(1 - a)(1 - b)(1 - c) \leq 0 < 1$. Ta có điều phải chứng minh.
- Nếu $b > 1$, kết hợp với $c \geq 0$ và áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có:

$$(1 - a)(1 - b)(1 - c) = (a - 1)(b - 1)(1 - c) \leq (a - 1)(b - 1) \leq \left(\frac{a + b - 2}{2} \right)^2 \leq \left(\frac{a + b + c + abc - 2}{2} \right)^2 = 1.$$

Từ đó suy ra: $ab + bc + ca \leq a + b + c + abc = 4$. Do đó $P \leq 4$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 2, c = 0$ và các hoán vị.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 4 đạt được khi $a = b = 2, c = 0$ và các hoán vị.

Câu 4.

a) Dễ thấy D, E, F là các điểm của (I) với các cạnh BC, CA, AB do đó $BD = BF$, kết hợp với $ID = IF$ suy ra BI là trung trực của DF . Do đó $BI \perp DF$.

Mà BI, BK theo thứ tự là phân giác trong và ngoài của góc $\widehat{ABC}$ nên $BI \perp BK$, từ đó $BK \parallel DF$.

Chứng minh tương tự, ta cũng có $CK \parallel DE \perp CI$.

Từ $BK \parallel DF$ và $KN \parallel DM$, ta suy ra: $\widehat{FDM} = \widehat{NKB}$ (1).

Mặt khác $ID \perp BC$, $IE \perp CA$ và $IF \perp AB$, suy ra: $\widehat{IDC} = \widehat{IEC} = \widehat{IEA} = \widehat{IFA} = 90^\circ$.

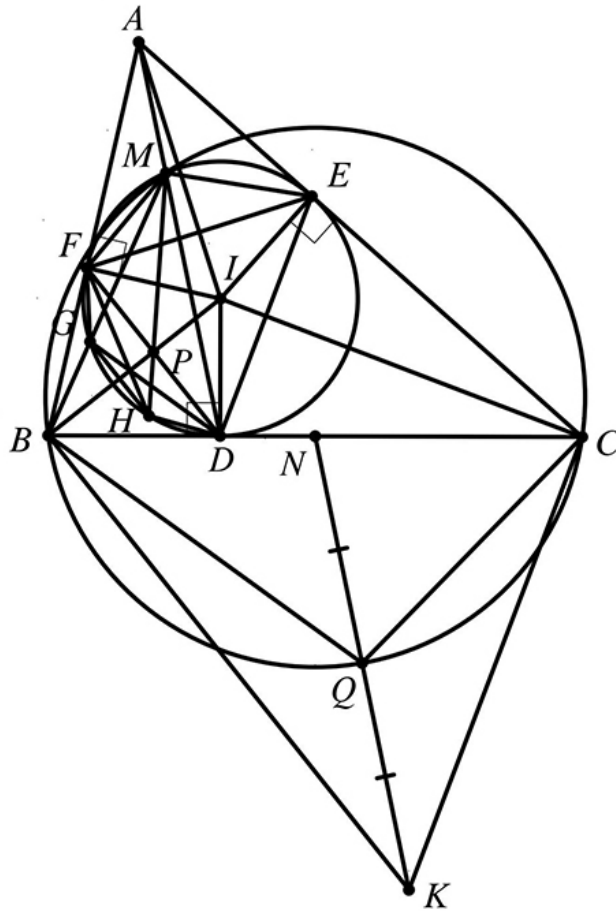
Do đó $IDCE$ và $IEAF$ là các tứ giác nội tiếp.

Lại có IA , IB , IC là ba đường phân giác trong của $\triangle ABC$, ta có:

$$\widehat{FED} = \widehat{FEI} + \widehat{IED} = \widehat{FAI} + \widehat{ICD} = \frac{\widehat{BAC}}{2} + \frac{\widehat{ACB}}{2} = 90^\circ - \frac{\widehat{ABC}}{2}.$$

Vì $BK \perp BI$ và tứ giác $DEMF$ nội tiếp nên: $\widehat{FMD} = \widehat{FED} = 90^\circ - \frac{\widehat{BAC}}{2} = \widehat{KBI} - \widehat{CBI} = \widehat{NBK}$ (2).

Từ (1) và (2), suy ra tam giác MFD đồng dạng với tam giác BNK .



b) Theo câu a) BI là trung trực của DF nên BI vuông góc với DF tại trung điểm P của DF .

Gọi G là giao điểm thứ hai của BM và đường tròn (I) . Dễ thấy hai tam giác BMF và BFG đồng dạng với

nhau nên $\frac{BM}{BF} = \frac{BF}{BG} = \frac{MF}{FG}$. Suy ra:

$$\frac{BM}{BG} = \frac{BM}{BF} \cdot \frac{BF}{BG} = \frac{MF}{FG} \cdot \frac{MF}{FG} = \left(\frac{MF}{FG} \right)^2 \quad (3).$$

Chứng minh tương tự ta cũng có: $\frac{BM}{BG} = \left(\frac{MD}{DG} \right)^2 \quad (4).$

Từ (3) và (4) suy ra: $\frac{FM}{FG} = \frac{DM}{DG}.$

Kẻ dây cung GH của (I) và song song với DF thì tứ giác $FDHG$ là hình thang cân.

Suy ra: $FH = DG$ và $FG = DH$. Khi đó: $\frac{FM}{DH} = \frac{FM}{FG} = \frac{DM}{DG} = \frac{DM}{FH}.$

Do đó: $FM \cdot FH = DM \cdot DH \quad (5).$

Gọi x, y là các khoảng cách từ M đến HD, HF thì $\begin{cases} x = MD \cdot \sin \widehat{MDH} \\ y = MF \cdot \sin(180^\circ - \widehat{MFH}) = MF \cdot \sin \widehat{MDH} \end{cases}$

Suy ra: $\frac{x}{MD} = \frac{y}{MF} \quad (6).$

Từ (5) và (6), suy ra: $\frac{S_{FMH}}{S_{DMH}} = \frac{x \cdot FH}{y \cdot HD} = \frac{MF \cdot FH}{MD \cdot DH} = 1$. Do đó MH đi qua trung điểm của FD .

Tức là $P \in MH$, do đó $\widehat{BMF} = \widehat{GMF} = \widehat{DMH} = \widehat{DMP}.$

c) Gọi Q là trung điểm của KN . Theo câu a) thì $\triangle MFD \sim \triangle BNK$ mà MP, BQ lần lượt là trung tuyến của hai tam giác này nên $\triangle DMP \sim \triangle KQB$.

Kết hợp với câu b), ta có: $\widehat{BMF} = \widehat{DMP} = \widehat{KBQ}$. Đặt $\alpha = \widehat{BMF}$, ta có: $\widehat{BQN} = \widehat{QKB} + \widehat{KBQ} = \widehat{QKB} + \alpha.$

Tương tự đặt $\beta = \widehat{CME}$ thì ta cũng có $\widehat{CQN} = \widehat{QKC} + \beta.$

Suy ra: $\widehat{BQC} = \widehat{BQN} + \widehat{CQN} = \widehat{QKB} + \alpha + \widehat{QKC} + \beta = \widehat{BKC} + \alpha + \beta.$

Do $BK \parallel DF, CK \parallel DE$ và tứ giác $DEMF$ nội tiếp nên:

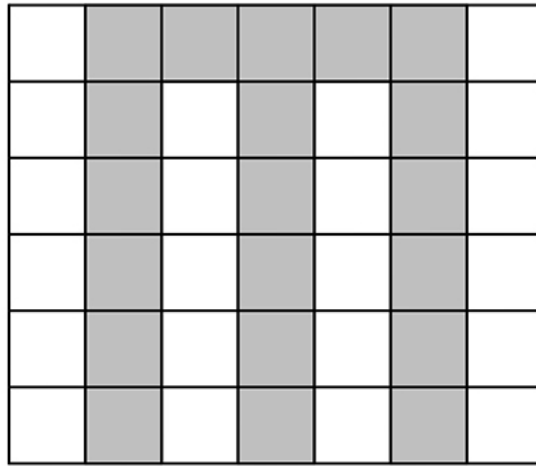
$$\widehat{BKC} = \widehat{EDF} = 180^\circ - \widehat{EMF} = 180^\circ - (\widehat{BMF} + \widehat{BMC} + \widehat{CME}) = 180^\circ - (\widehat{BMC} + \alpha + \beta).$$

Suy ra $\widehat{BQC} = \widehat{BKC} + \alpha + \beta = 180^\circ - \widehat{BMC}$ hay $\widehat{BQC} + \widehat{BMC} = 180^\circ.$

Do đó tứ giác $BMQC$ nội tiếp, tức là đường tròn ngoại tiếp tam giác BCM đi qua trung điểm Q của KN .

Câu 5.

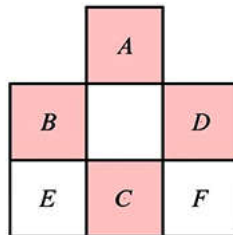
a) Cách tô màu thỏa mãn $m = 20$.



b) Theo cách tô của bảng, ta thấy rằng trong ba ô vuông nằm ở các vị trí trong hai dạng dưới đây có ít nhất một ô được tô đen.



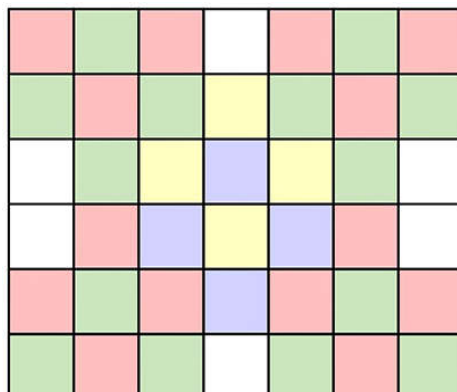
Tiếp theo, ta xét các ô nằm ở vị trí như hình dưới đây (phần có màu đỏ trong hình).



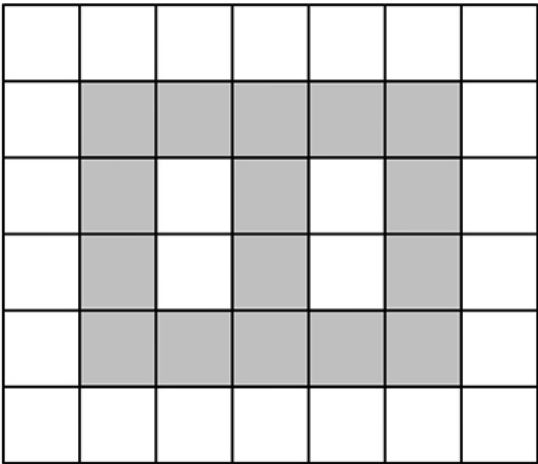
Ta sẽ chứng minh rằng trong các ô A, B, C, D có ít nhất hai ô được tô màu đen. Thật vậy, giả sử trong bốn ô này chỉ có tối đa một ô được tô màu đen. Khi đó, theo nhận xét trên, ta cũng thấy rằng trong các ô này có ít nhất một ô màu đen. Không mất tính tổng quát, giả sử ô A được tô màu đen và ô B, C, D được tô trắng.

Lúc này bảng con 2×3 chữ các ô B, E, C, F, D không có hai ô tô đen nào nằm cạnh nhau, mâu thuẫn. Vậy trong bốn ô A, B, C, D có ít nhất hai ô được tô đen. Từ đây, ta suy ra bất cứ bốn ô nào nằm ở vị trí giống với bốn ô A, B, C, D trong hình vẽ trên đều có ít nhất hai ô được tô đen.

Bây giờ, ta chia bảng ô vuông đã cho thành các vùng như hình vẽ bên dưới.



Từ các kết quả thu được, ta suy ra $m \geq 16$. Với $m = 16$, ta thu được cách tô màu thỏa mãn sau:



Vậy giá trị nhỏ nhất của m là 16.

----- **HẾT** -----