

Câu 1. (3,0 điểm)

a) Giải phương trình $(\sqrt{x+2020} - \sqrt{x-2019})\left(1 + \sqrt{x^2 + x - 2019 \cdot 2020}\right) = 4039$.

b) Cho hai số thực m, n khác 0 thỏa mãn $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$. Chứng minh rằng phương trình:

$$(x^2 + mx + n)(x^2 + nx + m) = 0 \text{ luôn có nghiệm.}$$

Câu 2. (1,5 điểm)

Với các số thực x, y thay đổi thỏa mãn $1 \leq x \leq y \leq 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = 2(x^2 + y^2) + 4(x - y - xy) + 7.$$

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình $x^2 + xy + y^2 = x^2 y^2$.

b) Với a, b là các số thực dương thỏa mãn $ab + a + b = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} = \frac{1+ab}{\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)}}.$$

Câu 4. (3,5 điểm)

Cho tam giác ABC cân tại A ($\widehat{BAC} > 90^\circ$) nội tiếp đường tròn (O) bán kính R , M là điểm nằm trên cạnh BC sao cho $BM > CM$. Gọi D là giao điểm của AM và đường tròn (O) với $(D \neq A)$, H là trung điểm của đoạn thẳng BC . Gọi E là điểm chính giữa cung lớn BC , ED cắt BC tại N .

a) Chứng minh rằng $MA \cdot MD = MB \cdot MC$ và $BN \cdot CM = BM \cdot CN$.

b) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMD . Chứng minh rằng ba điểm B, I, E thẳng hàng.

c) Khi $2AB = R$, xác định vị trí của M để $2MA + AD$ đạt giá trị nhỏ nhất.

----- HẾT -----

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1.

a) Điều kiện: $x \geq 2019$. Nhân cả hai vế của phương trình cho $\sqrt{x+2020} + \sqrt{x-2019}$, ta được:

$$\begin{aligned} 4039\left(1 + \sqrt{x^2 + x - 2019 \cdot 2020}\right) &= 4039\left(\sqrt{x+2020} - \sqrt{x-2019}\right) \\ \Leftrightarrow \sqrt{x+2020} + \sqrt{x-2019} &= 1 + \sqrt{(x+2020)(x-2019)} \\ \Leftrightarrow \left[\sqrt{(x+2020)(x-2019)} - \sqrt{x+2020}\right] - \left(\sqrt{x-2019} - 1\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-2019} - 1\right)\left(\sqrt{x+2020} - 1\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2019} = 1 \\ \sqrt{x+2020} = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow x = 2020. \end{aligned}$$

So với điều kiện ban đầu ta thấy $x = 2020$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

b) Ta có $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(m+n) = mn$.

Phương trình tương đương: $x^2 + mx + n = 0$ (1) hoặc $x^2 + nx + m = 0$ (2).

Phương trình (1) và (2) lần lượt có $\Delta_1 = m^2 - 4n$ và $\Delta_2 = n^2 - 4m$.

Ta có: $\Delta_1 + \Delta_2 = m^2 + n^2 - 4m - 4n = m^2 + n^2 - 2mn = (m-n)^2 \geq 0$.

Suy ra một trong hai số Δ_1 hoặc Δ_2 lớn hơn hoặc bằng 0.

Do đó một trong hai phương trình (1) hoặc (2) luôn có nghiệm.

Suy ra phương trình đã cho luôn có nghiệm.

Câu 2.

Ta có: $P = 2(x^2 + y^2) + 4(x - y - xy) + 7 = 2(x - y)^2 + 4(x - y) + 7 = 2(x - y + 1)^2 + 5 \geq 5$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} y = x + 1 \\ 1 \leq x \leq y \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ x \in (0; 4] \end{cases}$.

Chẳng hạn $x = 2; y = 3$ hoặc $x = 3; y = 4$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 5 đạt được khi $y = x + 1$ và $x \in (0; 4]$.

Câu 3.

a) Ta có $x^2 y^2 = x^2 + xy + y^2 : y \Rightarrow x : y$. Mặt khác $x^2 y^2 = x^2 + xy + y^2 : x \Rightarrow y : x$.

Suy ra: $x = y$ hoặc $x = -y$.

Với $x = y$, ta có: $3x^2 = x^4 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0$.

Với $x = -y$, ta có: $x^2 = x^4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$.

Với $x = 1$, ta có: $y = -1$. Với $x = -1$, ta có: $y = 1$.

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm $(x; y) = (0; 0), (1; -1), (-1; 1)$.

b) Ta có: $ab + a + b = 1 \Rightarrow 1 + a^2 = a^2 + ab + a + b = (a + b)(a + 1)$.

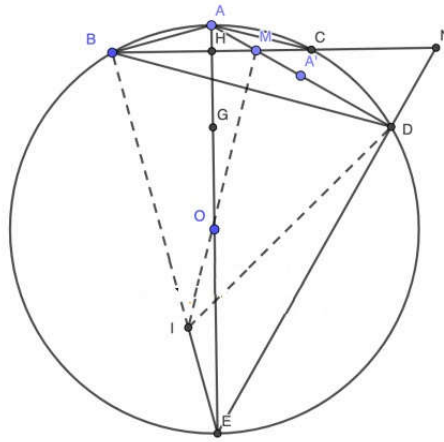
Tương tự $1 + b^2 = (a + b)(b + 1)$.

Suy ra:

$$\begin{aligned} \frac{a}{a^2 + 1} + \frac{b}{b^2 + 1} &= \frac{a}{(a + b)(a + 1)} + \frac{b}{(a + b)(b + 1)} \\ &= \frac{2ab + a + b}{(a + b)(1 + a)(1 + b)} = \frac{1 + ab}{\sqrt{(a + b)(1 + a)} \cdot \sqrt{(a + b)(1 + a)} \cdot \sqrt{(1 + a)(1 + b)}} \\ &= \frac{1 + ab}{2\sqrt{(1 + a^2)(1 + b^2)}} \end{aligned}$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Câu 4.



a) Ta có: $\widehat{ABM} = \widehat{MDC}$ do cùng chắn cung $\widehat{AC}$ và $\widehat{AMB} = \widehat{CMD}$.

Suy ra $\triangle BMA \sim \triangle DMC$ do đó: $\frac{MA}{MC} = \frac{MB}{MD}$.

$$\Rightarrow MA \cdot MD = MB \cdot MC.$$

$\triangle ABE$ và $\triangle ACE$ có AE là cạnh chung, $AB = AC$ và $\widehat{ABE} = \widehat{ACE}$ nên $\triangle ABE = \triangle ACE$.

Suy ra $\widehat{ABE} = \widehat{ACE} = \frac{\widehat{ABE} + \widehat{ACE}}{2} = 90^\circ$ (do tứ giác $ABEC$ nội tiếp).

Suy ra AD là đường kính của (O) . Mà $D \in (O)$ nên $\widehat{ADE} = 90^\circ$ hay $MD \perp EN$.

$$\text{Ta có } \triangle NHE \sim \triangle NDM \Rightarrow \frac{NE}{NM} = \frac{NH}{MD} \Rightarrow NM \cdot NH = NE \cdot ND \quad (3).$$

$$\text{Lại có: } \triangle NCD \sim \triangle NEB \Rightarrow \frac{NC}{ND} = \frac{NE}{NB} \Rightarrow NB \cdot NC = NE \cdot ND \quad (4).$$

$$\text{Từ (3) và (4) suy ra } NM \cdot NH = NB \cdot NC = (MN - MC) \cdot NB.$$

$$\text{Suy ra: } BN \cdot MC = MN \cdot NH - MN \cdot NB = MN(NH - NB) = MN \cdot BH.$$

$$\text{Hay } BN \cdot CM = MN \cdot BH \quad (5).$$

$$\text{Tứ giác } AHDN \text{ nội tiếp do có } \widehat{AHN} = \widehat{NDA} = 90^\circ \Rightarrow MA \cdot MD = MH \cdot MN.$$

$$\text{Tứ giác } ABDC \text{ nội tiếp } \Rightarrow MA \cdot MD = MB \cdot MC.$$

$$\text{Do đó: } MH \cdot MN = MB \cdot MC = MB \cdot (MN - CN).$$

$$\text{Suy ra: } BM \cdot CN = MN(MB - MH) = MN \cdot BH \quad (6).$$

$$\text{Từ (5) và (6) suy ra: } BN \cdot CM = BM \cdot CN.$$

b) Ta có:

$$\widehat{IBD} = 90^\circ - \frac{\widehat{BID}}{2} = 90^\circ - \frac{\widehat{BIM} + \widehat{MID}}{2} = 90^\circ - \frac{2(\widehat{BDM} + \widehat{MBD})}{2} = 90^\circ - (\widehat{ADC} + \widehat{CBD}) = 90^\circ - \widehat{AED}.$$

$$\text{Suy ra: } \widehat{IBD} = 90^\circ - \widehat{AED}.$$

$$\text{Mà } \widehat{EBD} = \widehat{EAD} = 90^\circ - \widehat{AED}.$$

$$\text{Do đó } \widehat{IBD} = \widehat{EBD} \text{ hay } B, I, E \text{ thẳng hàng.}$$

$$\text{c) Ta có: } \widehat{ABM} = \widehat{ACB} = \widehat{ADB} \text{ nên } \triangle ABM \sim \triangle ADB.$$

$$\text{Suy ra: } \frac{AB}{AD} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow AD \cdot AM = AB^2 = \frac{R^2}{4}.$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có: } 2AM + AD \geq 2\sqrt{2AM \cdot AD} = 2\sqrt{2 \cdot \frac{R^2}{4}} = R\sqrt{2}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } 2AM = AD \text{ hay } M \text{ là trung điểm } AD. \text{ Khi đó } AD = \frac{\sqrt{2}}{2}R.$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của của } 2AM + AD \text{ là } R\sqrt{2} \text{ đạt được khi } M \text{ là trung điểm } AD \text{ với } D \text{ là điểm sao cho } AD = \frac{\sqrt{2}}{2}R.$$