

Câu I (2,0 điểm).

1. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x \neq 0$ và $(x + \sqrt{x^2 + 2023})(y + \sqrt{y^2 + 2023}) = 2023$.

Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{2024x + y}{2023x - y}$.

2. Cho các số thực a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$.

Chứng minh rằng $\frac{bc}{a^2 + 2bc} + \frac{ca}{b^2 + 2ca} + \frac{ab}{c^2 + 2ab} = 1$.

Câu II (2,0 điểm).

1. Giải phương trình $(x-4)\sqrt{x} - (x-1)\sqrt{5-x} = 2x^2 - 10x + 5$.

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 8\sqrt{xy} - 2y - 8y + 4 = (x-y)^2 \\ 2\sqrt{2y-y^2}(\sqrt{8-2x} - 2\sqrt{2y+1}) = 4y + 5\sqrt{2-y} - 10\sqrt{x-2} \end{cases}$$

Câu III (2,0 điểm).

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $(2y-x^2)(2y+x^2) = x(x^4+1)+4y$.

2. Xác định số nguyên dương n lớn nhất sao cho với mọi số nguyên tố $p > 7$ thì $p^6 - 1$ chia hết cho n .

Câu IV (3,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) có các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại điểm H . Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng AH .

- Chứng minh tứ giác $DEKF$ nội tiếp đường tròn, gọi đường tròn đó là (S) .
- Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng EF, BC . Chứng minh AD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác HPQ .
- Gọi M, N lần lượt là giao điểm của (S) với các đoạn thẳng BH, CH . Tiếp tuyến tại D của đường tròn (S) cắt MN tại T . Gọi X, Y là các giao điểm của đường tròn (S) với đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC . Chứng minh các điểm T, X, Y thẳng hàng.

Câu V (1,0 điểm). Cho tập hợp $X = \{1; 2; \dots; 120\}$ gồm 120 số nguyên dương đầu tiên, trong đó có 60 số được viết bằng màu đỏ và 60 số còn lại được viết bằng màu xanh. Chứng minh rằng tồn tại 40 số nguyên dương liên tiếp của tập X , trong đó có 20 số được viết bằng màu đỏ và 20 số được viết bằng màu xanh.