

ĐỀ CHÍNH THỨC**ĐỀ THI MÔN TOÁN (DÀNH CHO CHUYÊN TOÁN)****Ngày thi: 05 tháng 6 năm 2022***Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)***(Đề thi gồm có 01 trang, 04 câu)****Câu I (3,0 điểm)**

1) Rút gọn biểu thức: $A = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$

2) Tìm m để các đường thẳng: $y = 2x + 4$ (d); $y = 3x + 5$ (d'); $y = -2mx + m - 3$ (Δ) cùng đi qua một điểm.3) Cho phương trình: $x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$ (m là tham số). Tìm m để phương trình có hai nghiệm dương.**Câu II (3,0 điểm)**

1) Tìm x, y nguyên thỏa mãn: $xy + 2x + y - 1 = 0$

2) Một cửa hàng điện máy thực hiện chương trình khuyến mãi giảm giá tất cả các mặt hàng 10 % theo giá niêm yết, và nếu hóa đơn khách hàng trên 10 triệu sẽ được giảm thêm 2% số tiền trên hóa đơn, hóa đơn trên 15 triệu sẽ được giảm thêm 4% số tiền trên hóa đơn, hóa đơn trên 40 triệu sẽ được giảm thêm 8% số tiền trên hóa đơn. Ông An muốn mua một ti vi với giá niêm yết là 9 200 000 đồng và một tủ lạnh với giá niêm yết là 7 100 000 đồng. Hỏi với chương trình khuyến mãi của cửa hàng, ông An phải trả bao nhiêu tiền?

3) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^2 - 6y^2 = xy \\ 3x^2 + 2y = xy + x \end{cases}$$

Câu III (3,0 điểm)Cho tam giác ABC vuông tại B ($BC > AB$) nội tiếp trong đường tròn tâm O đường kính $AC = 2R$. Kẻ dây cung BD vuông góc với AC, H là giao điểm của AC và BD. Trên HC lấy điểm E sao cho E đối xứng với A qua H. Đường tròn tâm O' đường kính EC cắt đoạn BC tại I (I khác C).

1) Chứng minh rằng: $CI \cdot CA = CE \cdot CB$

2) Chứng minh rằng: Ba điểm D, I, E thẳng hàng.

3) Chứng minh rằng: HI là tiếp tuyến của đường tròn đường kính EC.

4) Khi B thay đổi thì H thay đổi, xác định vị trí của H trên AC để diện tích tam giác O'IH lớn nhất.

Câu IV (1,0 điểm)1) Tìm tất cả các cặp số thực x, y dương thỏa mãn điều kiện:

$$\sqrt{22x^2 + 36xy + 6y^2} + \sqrt{6x^2 + 36xy + 22y^2} = x^2 + y^2 + 32$$

2) Cho a, b là các số thực thỏa mãn: $a^2 + b^2 = a + b$.

Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + a^2b + ab^2 \leq 4$

----- Hết -----

Họ và tên thí sinh:..... **Số báo danh:** **Phòng thi:****Giám thị 1:**..... **Giám thị 2:**.....

Câu I (3,0 điểm)

Phần	Nội dung	Điểm
1	a) Rút gọn biểu thức: $A = \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2}$	0,5
	$A = \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} + 1 = 2$	0,5
2	Tọa độ giao điểm của (d) và (d') là A(-1;-2)	0,5
	Đề (Δ), (d) và (d') cùng đi qua một điểm khi và chỉ khi A thuộc (Δ) Khi đó ta có $-2m \cdot (-1) + m - 3 = -2 \Leftrightarrow 3m = 1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}$ Vậy $m = \frac{1}{3}$ thì 3 đường thẳng đã cho cùng đi qua điểm A(-1;-2)	0,5
3	3) Phương trình $x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$ có hai nghiệm dương khi và chỉ $\begin{cases} \Delta' = m^2 - 2m + 1 \geq 0 \\ P = 2m - 1 > 0 \\ S = 2m > 0 \end{cases}$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 \geq 0 \forall m \\ m > \frac{1}{2} \\ m > 0 \end{cases} \Rightarrow m > \frac{1}{2}$	0,5

Câu II (3,0 điểm)

Phần	Nội dung	Điểm
1	$xy + 2x + y - 1 = 0 \Leftrightarrow x(y+2) + (y+2) - 3 = 0 \Leftrightarrow (y+2)(x+1) = 3$	0,5
	Vì x, y nguyên nên (y+2) và (x-1) thuộc $U(3) = \{-3; -1; 1; 3\}$ Học sinh tìm được cặp số nguyên (x;y) = (-4;-3); (-2;-5); (0;1); (2;-1)	0,5
2	Tổng giá trị 1 chiếc Tivi và 1 chiếc tủ lạnh ông An mua là 16 300 000 (đồng) Số tiền ông An phải trả khi được giảm giá 10% là. $16300000 \cdot 90\% = 14\,670\,000$ (đồng)	0,5

1	Xét hai tam giác CIE và CBA có $\angle ICE$ chung; $\angle EIC = \angle ABC = 90^\circ$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)	0,5
	Suy ra $\triangle CIE \sim \triangle CBA$ (g-g) $\Rightarrow \frac{CI}{CB} = \frac{CE}{CA} \Leftrightarrow CI \cdot CA = CE \cdot CB$ (dpcm)	0,5
2	Ta có $EI \perp BC$ (Do $\angle EIC$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)(1) Vì $BD \perp AC$ tại H, và $HA = HE$; $HB = HD$ nên tứ giác ABED là hình thoi	0,5
	Suy ra $DE \parallel AB$, mà $AB \perp BC$ nên $DE \perp BC$ (2) Từ (1) và (2) ta có 3 điểm D,E,I thẳng hàng.	0,5
3	Ta có tứ giác DHIC nội tiếp đường tròn đường kính DC nên ta có $\angle BIH = \angle BDC = (180^\circ - \angle HIC)$ Lại có $\angle BAC = \angle IEO'$ (đồng vị); $\angle IEO' = \angle O'IE$ (do tam giác $O'IE$ cân tại O') Suy ra $\angle BIH = \angle O'IE$ mà $\angle BIH + \angle HIE = 90^\circ$ nên $\angle HIE + \angle O'IE = 90^\circ$ suy ra $HI \perp O'I$ hay HI là tiếp tuyến của (O')	0,5
4	Ta có	có
	$2S_{\triangle O'IH} = O'I \cdot HI \leq \frac{O'I^2 + HI^2}{2} = \frac{O'H^2}{2} = \frac{\frac{AC^2}{4}}{2} = \frac{R^2}{2} \Rightarrow S_{\triangle O'IH} \leq \frac{R^2}{4}$	0,25
	Dấu = xảy ra khi $\begin{cases} O'I \cdot HI = \frac{R^2}{2} \\ O'I = HI \end{cases} \Rightarrow O'I = HI = \frac{R}{\sqrt{2}}$ (Do $O'I > 0$, $HI > 0$) Ta có $O'H = R$; mà $O'E = O'I = \frac{R}{\sqrt{2}}$ suy ra $AH = HE = R - \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{R(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}$ Vậy $AH = \frac{R(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}$ thì diện tích tam giác $O'IH$ lớn nhất.	0,25

Câu IV (1,0 điểm)

Phần	Nội dung	Điểm
1	Ta có: $22x^2 + 36xy + 6y^2 = (5x + 3y)^2 - 3(x - y)^2 \leq (5x + 3y)^2$ $\Rightarrow \sqrt{22x^2 + 36xy + 6y^2} \leq 5x + 3y$ (do x, y dương) Tương tự ta có : $6x^2 + 36xy + 22y^2 = (3x + 5y)^2 - 3(x - y)^2 \leq (3x + 5y)^2$ $\Rightarrow \sqrt{6x^2 + 36xy + 22y^2} \leq 3x + 5y$ (do x, y dương) Vậy $\sqrt{22x^2 + 36xy + 6y^2} + \sqrt{22x^2 + 36xy + 6y^2} \leq 8(x + y)$ (1)	0,25
	Ta có $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 \geq 0 (\forall x, y)$ $\Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 8y + 16 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 32 \geq 8(x + y)$ (2) Vậy $\sqrt{22x^2 + 36xy + 6y^2} + \sqrt{22x^2 + 36xy + 6y^2} = x^2 + y^2 + 32$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x - 4 = 0 \Rightarrow x = y = 4 \\ y - 4 = 0 \end{cases}$	0,25
2	Nếu $a + b = 0$ suy ra $a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = b = 0$ khi đó bất đẳng thức cần chứng minh đúng. Nếu $a + b \neq 0 \Rightarrow a + b = a^2 + b^2 > 0$ Ta có : $a^2 + b^2 \geq \frac{(a + b)^2}{2} \Rightarrow a + b \geq \frac{(a + b)^2}{2} \Leftrightarrow 2(a + b) \geq (a + b)^2$ Suy ra $a + b \leq 2$	0,25
	Ta có : $a^3 + b^3 + a^2b + ab^2 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) + ab(a + b) = (a + b)^2$ Vì $0 < a + b \leq 2$ nên $(a + b)^2 \leq 4$ (đpcm)	0,25

*** Chú ý:** Các lời giải đúng khác đều được xem xét cho điểm tương ứng.