

Câu 1. (2,0 điểm)

- 1) Tìm điều kiện xác định của biểu thức $P = \sqrt{\frac{x^2 + 1}{5x - 1}}$.
- 2) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = m^2x + m - 1$ ($m \neq 0$) và đường thẳng $y = 9x + 2$ song song.
- 3) Tính diện tích tam giác ABC đều cạnh bằng $2\sqrt{3} \text{ cm}$.
- 4) Tính thể tích của hình nón có đường sinh bằng 5 cm và bán kính đáy 3 cm .

Câu 2. (1,5 điểm) Cho biểu thức $Q = \left(\frac{x^2}{x^2 - \sqrt{x^3}} + \frac{x+1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+1}{x-1} \right) \cdot \left(\frac{x+25}{x+\sqrt{x}+1} \right)$ với $x > 0; x \neq 1$.

- 1) Rút gọn biểu thức Q .
- 2) Tìm x để biểu thức Q đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 3. (2,5 điểm)

- 1) Cho phương trình $x^2 - (2m+1)x + m^2 + 3 = 0$ (1) (với m là tham số).
 - a) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm.
 - b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $1 < x_1 < x_2$.
- 2) Giải phương trình $x + 1 + \sqrt{2x+1} - \sqrt{x^2 + 8x + 4} = 0$.

Câu 4. (3,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC ($AB > AC$) nội tiếp đường tròn tâm O đường kính AP . Các đường cao BE và CF cắt nhau tại H .

- 1) Chứng minh rằng tứ giác $BCEF$ nội tiếp và $AE \cdot AC = AF \cdot AB$.
- 2) Gọi K, I lần lượt là trung điểm của EF và AH . Chứng minh IK song song với AP .
- 3) Gọi M là giao điểm của IK và BC ; N là giao điểm của MH với cung nhỏ AC của đường tròn (O) .
Chứng minh rằng $\widehat{HMC} = \widehat{HAN}$.

Câu 5. (1,0 điểm)

- 1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 8\sqrt{x^2y+y} = 3(x^2-y+1) \\ x^2+9y^2 = \frac{13}{9} \end{cases}$$

- 2) Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq 2021$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{7x^2 - 2xy + 4y^2}} + \frac{1}{\sqrt{7y^2 - 2yz + 4z^2}} + \frac{1}{\sqrt{7z^2 - 2zx + 4x^2}} \leq \frac{2021}{3}.$$

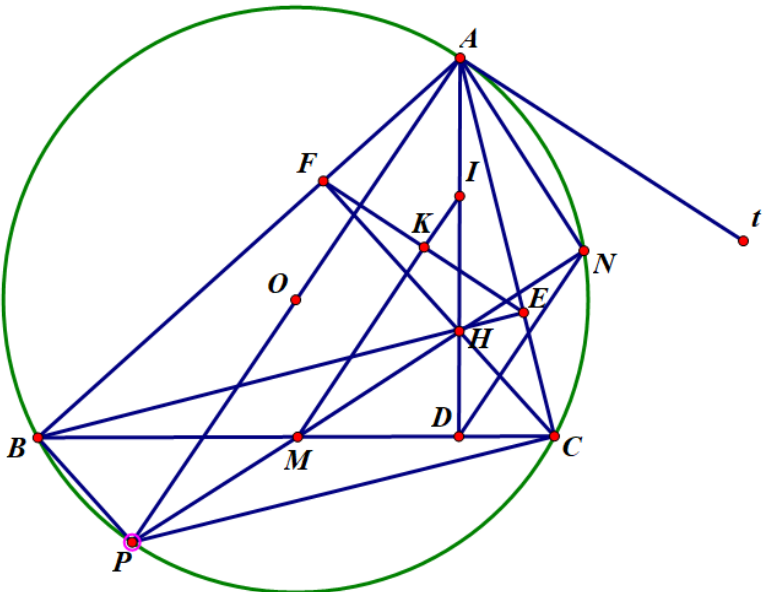
-----HẾT-----

Họ và tên thí sinh:.....Họ tên, chữ ký GT 1:.....

Số báo danh:.....Họ tên, chữ ký GT 2:.....

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1	Câu 1. (2,0 điểm) 1) Tìm điều kiện xác định của biểu thức $P = \sqrt{\frac{x^2+1}{5x-1}}$. 2) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $y = m^2x + m - 1$ ($m \neq 0$) và đường thẳng $y = 9x + 2$ song song. 3) Tính diện tích tam giác ABC đều cạnh bằng $2\sqrt{3} \text{ cm}$. 4) Tính thể tích của hình nón có đường sinh bằng 5 cm và bán kính đáy 3 cm.	
1)	Biểu thức xác định khi và chỉ khi $\frac{x^2+1}{5x-1} \geq 0$	0,25
	$\Leftrightarrow 5x-1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{5}$ (vì $x^2+1 > 0, \forall x$)	0,25
2)	Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi $\begin{cases} m^2 = 9 \\ m-1 \neq 2 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 3 \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = -3$	0,25
3)	Gọi AM là đường cao tam giác ABC , tính được $AM = 3 \text{ cm}$	0,25
	$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} AM \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \text{ cm}^2$.	0,25
4)	Hình nón có chiều cao $h = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ cm}$	0,25
	Thể tích hình nón là $V = \frac{1}{3} \pi 3^2 \cdot 4 = 12\pi \text{ cm}^3$	0,25
Câu 2	Câu 2. (1,5 điểm) Cho biểu thức $Q = \left(\frac{x^2}{x^2 - \sqrt{x^3}} + \frac{x+1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+1}{x-1} \right) \cdot \left(\frac{x+25}{x+\sqrt{x}+1} \right)$ với $x > 0; x \neq 1$. 1) Rút gọn biểu thức Q. 2) Tìm x để biểu thức Q đạt giá trị nhỏ nhất.	
1)	Với đk : $x > 0; x \neq 1$, Ta có $Q = \left(\frac{x^2}{x\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} + \frac{x+1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) \cdot \frac{x+25}{x+\sqrt{x}+1}$	0,25

	$= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{x+1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) \cdot \frac{x+25}{x+\sqrt{x}+1}$	0,25
	$= \left(1 + \frac{x+1}{\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{x+25}{x+\sqrt{x}+1}$	0,25
	$= \frac{x+25}{\sqrt{x}}$	0,25
2)	Với đk : $x > 0; x \neq 1$, Ta có $Q = \sqrt{x} + \frac{25}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{25}{\sqrt{x}}}$	0,25
	$\Rightarrow Q \geq 10$. Vậy giá trị nhỏ nhất của Q bằng 10, xảy ra khi $\sqrt{x} = \frac{25}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 25$	0,25
Câu 3	Câu 3. (2,5 điểm) 1) Cho phương trình $x^2 - (2m+1)x + m^2 + 3 = 0$ (1) (với m là tham số). a) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có nghiệm. b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $1 < x_1 < x_2$. 2) Giải phương trình $x+1+\sqrt{2x+1}-\sqrt{x^2+8x+4}=0$.	
1.a)	Phương trình (1) có $\Delta = (2m+1)^2 - 4(m^2+3) = 4m-11$.	0,25
	Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = 4m-11 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{11}{4}$.	0,25
1.b)	Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m > \frac{11}{4}$. (*)	0,25
	Ta có $1 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 > 2 \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 > 2 \\ x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 > 0 \end{cases}$	0,25
	Theo định lý Viét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m+1 \\ x_1 x_2 = m^2 + 3 \end{cases}$, thay vào trên ta có: $\begin{cases} 2m+1 > 2 \\ m^2 + 3 - (2m+1) + 1 > 0 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{2} \\ m^2 - 2m + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{1}{2} \quad (\text{vì } m^2 - 2m + 3 = (m-1)^2 + 2 > 0 \text{ với mọi } m)$ Kết hợp điều kiện (*) ta được $m > \frac{11}{4}$.	0,25

2)	Với điều kiện: $\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ x^2+8x+4 \geq 0 \end{cases}$ PT $x+1+\sqrt{2x+1}-\sqrt{x^2+8x+4}=0 \Leftrightarrow (x+1)+\sqrt{2x+1}-\sqrt{(x+1)^2+3(2x+1)}=0$	0,25
	Đặt $a=x+1$ ($a>0$); $b=\sqrt{2x+1}$ ($b\geq 0$) khi đó phương trình trở thành: $a+b=\sqrt{a^2+3b^2} \Leftrightarrow (a+b)^2=a^2+3b^2 \Leftrightarrow b(a-b)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=b \end{cases}$	0,25
	+ Trường hợp 1: $b=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$ (thỏa mãn) + Trường hợp 2: Với $a=b \Rightarrow x+1=\sqrt{2x+1} \Leftrightarrow (x+1)^2=2x+1 \Leftrightarrow x=0$ (thỏa mãn)	0,25
	Vậy phương trình có hai nghiệm $x=-\frac{1}{2}; x=0$. Lưu ý: + Học sinh có thể chuyển về: $x+1+\sqrt{2x+1}=\sqrt{x^2+8x+4}$ bình phương hai vế và đưa phương trình về phương trình tích.	0,25
Câu 4	Câu 4. (3,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC ($AB > AC$) nội tiếp đường tròn tâm O đường kính AP. Các đường cao BE và CF cắt nhau tại H. 1) Chứng minh rằng tứ giác $BCEF$ nội tiếp và $AE.AC = AF.AB$. 2) Gọi K, I lần lượt là trung điểm của EF và AH. Chứng minh IK song song với AP. 3) Gọi M là giao điểm của IK và BC; N là giao điểm của MH với cung nhỏ AC của đường tròn (O). Chứng minh rằng $\widehat{HMC} = \widehat{HAN}$.	
		
1)	Vì BE, CF là các đường cao của tam giác ABC nên $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^\circ$	0,25
	suy ra 4 điểm B, C, E, F cùng thuộc đường tròn đường kính BC hay tứ giác $BCEF$ nội tiếp.	0,25

	Xét hai tam giác AEF và tam giác ABC có $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$ (cùng bù với góc $\widehat{FEC}$) và chung góc A , suy ra $\triangle AEF$ đồng dạng với $\triangle ABC$ (g.g).	0,25
	Suy ra $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \Leftrightarrow AE.AC = AF.AB$	0,25
2)	Ta có E và F cùng nhìn đoạn AH một góc 90° nên tứ giác $AFHE$ nội tiếp đường tròn tâm I đường kính AH . Lại có K là trung điểm của dây cung EF suy ra $IK \perp EF$. (1)	0,25
	Kẻ tiếp tuyến At (hình vẽ) của đường tròn tâm O ta suy ra $AP \perp At$. (2)	
	Khi đó $\widehat{CAt} = \widehat{ABC} = \frac{1}{2} s\widehat{AC}$ (3)	0,25
	Tứ giác $BCEF$ nội tiếp nên suy ra $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$ (4)	
	từ (3) và (4) suy ra $\widehat{AEF} = \widehat{CAt}$, suy ra At và EF song song. (5)	0,25
	Từ (2) và (5) suy ra $AP \perp EF$, kết hợp với (1) suy ra IK song song với AP .	0,25
3)	Gọi D là giao điểm của AH và BC Ta có tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn đường kính BC , IK là đường trung trực của dây cung EF nên M là trung điểm của BC .	0,25
	Có $BP \parallel CH$ vì cùng vuông góc với AB ; $CP \parallel BH$ vì cùng vuông góc với AC Suy ra tứ giác $BPCH$ là hình bình hành nên 3 điểm P, M, H thẳng hàng, do đó 4 điểm P, M, H, N thẳng hàng.	0,25
	$\Rightarrow \widehat{ANM} = 90^\circ$ mà $\widehat{ADM} = 90^\circ$ suy ra tứ giác $ANDM$ nội tiếp.	0,25
	$\Rightarrow \widehat{NMD} = \widehat{NAD}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{ND}$) hay $\widehat{HMC} = \widehat{HAN}$	0,25
Câu 5	Câu V. (1,0 điểm) 1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 8\sqrt{x^2y+y} = 3(x^2-y+1) & (1) \\ x^2+9y^2 = \frac{13}{9}. & (2) \end{cases}$	
	2) Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq 2021$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{\sqrt{7x^2-2xy+4y^2}} + \frac{1}{\sqrt{7y^2-2yz+4z^2}} + \frac{1}{\sqrt{7z^2-2zx+4x^2}} \leq \frac{2021}{3}.$	
1	Điều kiện: $y \geq 0$ Chia 2 vế của phương trình (1) cho $x^2+1 > 0$ ta được $(1) \Leftrightarrow 8\sqrt{\frac{y}{x^2+1}} = 3 - \frac{3y}{x^2+1}.$ Đặt $t = \sqrt{\frac{y}{x^2+1}}$ ($t \geq 0$) ta có phương trình: $3t^2 + 8t - 3 = 0$, giải PT được $t = \frac{1}{3}$ thỏa mãn.	0,25

	Với $t = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{9}(x^2 + 1)$ thay vào (2) ta được: $x^2 + \frac{1}{9}(x^2 + 1)^2 = \frac{13}{9} \Leftrightarrow x^4 + 11x^2 - 12 = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = -12 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$ khi đó $y = \frac{2}{9}$ thỏa mãn. Vậy hệ phương trình có các nghiệm $(x;y)$ là $\left(-1; \frac{2}{9}\right); \left(1; \frac{2}{9}\right)$.	0,25
	Với $\forall a, b, c > 0$ ta có: $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}; \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$ $\Rightarrow (a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{a + b + c} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$. Với $x; y; z$ là các số dương Ta có: $7x^2 - 2xy + 4y^2 = (2x + y)^2 + 3(x - y)^2 \geq (2x + y)^2$ $\Rightarrow \sqrt{7x^2 - 2xy + 4y^2} \geq 2x + y \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{7x^2 - 2xy + 4y^2}} \leq \frac{1}{2x + y} = \frac{1}{x + x + y} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ Đấu bằng xảy ra khi $x = y$.	0,25
2	Tương tự ta có: $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{7y^2 - 2yz + 4z^2}} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$ dấu bằng xảy ra khi $y = z$. $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{7z^2 - 2zx + 4x^2}} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right)$ dấu bằng xảy ra khi $z = x$. Cộng các BĐT trên ta được $\frac{1}{\sqrt{7x^2 - 2xy + 4y^2}} + \frac{1}{\sqrt{7y^2 - 2yz + 4z^2}} + \frac{1}{\sqrt{7z^2 - 2zx + 4x^2}} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{3}{x} + \frac{3}{y} + \frac{3}{z}\right) \leq \frac{2021}{3}$ Đấu bằng xảy ra khi $x = y = z = \frac{3}{2021}$.	0,25

Lưu ý:

+ Các cách giải khác đáp án nếu đúng, phù hợp với chương trình THCS, ban giám khảo thống nhất cho điểm thành phần tương ứng.

_____HẾT_____