

*Dành cho học sinh thi vào các lớp chuyên xã hội**Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian phát đề)*Đề thi gồm 01 trang**Câu 1. (2,0 điểm)**

- 1) Tính giá trị biểu thức $P = \sqrt{2024 + 2\sqrt{2023}} - \sqrt{2025 + 2\sqrt{2024}}$.
- 2) Tìm tọa độ của điểm M là giao điểm của đường thẳng $y = x + 1$ với trục Ox .
- 3) Tính diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác vuông có cạnh huyền bằng $2\sqrt{2}$ cm.
- 4) Tính thể tích của hình nón có chiều cao bằng 8 cm và bán kính đáy bằng 6 cm.

Câu 2. (1,5 điểm)

Cho biểu thức $P = \frac{x + 4\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} + 2} + \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}$ (với $x \geq 0$ và $x \neq 9$).

- 1) Rút gọn biểu thức P .
- 2) Tìm x để $P = 5$.

Câu 3. (2,5 điểm)

- 1) Cho phương trình $x^2 - (2m + 1)x + 4m - 2 = 0$ (1) (với m là tham số).
 - a) Giải phương trình (1) với $m = 0$.
 - b) Tìm tất cả giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 13$.
- 2) Giải phương trình $\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} = \sqrt{2x+9}$.

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn tâm O , AD là đường cao. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của D trên AB, AC . Gọi AP là đường kính của đường tròn (O) .

- 1) Chứng minh tứ giác $AEDF$ nội tiếp và $AE \cdot AB = AF \cdot AC$.
- 2) Chứng minh tam giác ABC đồng dạng với tam giác AFE và AP vuông góc với EF .
- 3) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC . Đường tròn đường kính AH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai T . Gọi K là trực tâm của tam giác BTC . Chứng minh tứ giác $AHKT$ là hình bình hành.

Câu 5. (1,0 điểm)

1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{4x+5} + 2x = \sqrt{2y+5} + y \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} = 2 + \sqrt{y+3-x^2} \end{cases}.$$

2) Xét hai số thực dương x, y thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{6}{y} = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 4x + y + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{42}{y}$.

----- THCS.TOANMATH.com -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu khi làm bài. Giám thị coi thi không giải thích gì thêm./.

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Chữ ký giám thị 1:

Chữ ký giám thị 2:

Câu 1(2 điểm)

$$\begin{aligned}
 1) \quad P &= \sqrt{2024 + 2\sqrt{2023}} - \sqrt{2025 + 2\sqrt{2024}} \\
 &= \sqrt{2023 + 2\sqrt{2023} + 1} - \sqrt{2024 + 2\sqrt{2024} + 1} \\
 &= \sqrt{(\sqrt{2023} + 1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2024} + 1)^2} = |\sqrt{2023} + 1| - |\sqrt{2024} + 1| \\
 &= \sqrt{2023} + 1 - \sqrt{2024} - 1 = \sqrt{2023} - \sqrt{2024}
 \end{aligned}$$

2) Tung độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = x+1$ với trục Oy là: $y = 0+1=1$

Vậy $M(0; 1)$.

3) Đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông có tâm là trung điểm của cạnh huyền, bán kính của đường tròn đó là $R = 2\sqrt{2} : 2 = \sqrt{2} \text{ (cm)}$

Diện tích của hình tròn đó là: $S = \pi R^2 = \pi \cdot (\sqrt{2})^2 = 2\pi \approx 2.3,14 \approx 6,28 \text{ (cm}^2\text{)}$

4) Thể tích hình nón là:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 h \approx \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 6^2 \cdot 8 = 301,44 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Câu 2 (1,5 điểm)

Cho biểu thức $P = \frac{x + 4\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} + 2} + \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3} \text{ (} x \geq 0; x \neq 9 \text{)}$

a) Rút gọn biểu thức P

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{x + 4\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} + 2} + \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3} \\
 P &= \frac{(\sqrt{x} + 2)^2}{\sqrt{x} + 2} + \frac{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}{\sqrt{x} - 3} \\
 P &= \sqrt{x} + 2 + \sqrt{x} + 3 \\
 P &= \sqrt{x} + 2 + \sqrt{x} + 3 \\
 P &= 2\sqrt{x} + 5
 \end{aligned}$$

b) Tìm x để $P = 5$

$$\text{Ta có } P = 5 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} + 5 = 5 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (TM)}$$

Vậy $x = 0$ thì $P = 5$

Câu 3 (2,5 điểm)

$$1) x^2 - (2m+1)x + 4m - 2 = 0 \quad (1)$$

$$a) m = 0 \text{ phương trình trở thành } x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-2) + 1(x-2) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

Vậy với $m = 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm là $x = 2; x = -1$.

$$b) x^2 - (2m+1)x + 4m - 2 = 0 \quad (1)$$

$$\Delta = (2m+1)^2 - 4 \cdot (4m-2) = (2m-3)^2 \geq 0 \forall m$$

$$\text{Để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt thì } \Delta > 0 \Leftrightarrow 2m-3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{3}{2}$$

$$\text{Định lý Vi-ét } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m+1 \\ x_1 x_2 = 4m-2 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } x_1^2 + x_2^2 = 13 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 13 \Leftrightarrow (2m+1)^2 - 2 \cdot (4m-2) = 13 \Leftrightarrow 4m^2 - 4m + 5 - 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 4m - 8 = 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases} \quad (\text{TMDK})$$

Vậy $m \in \{-1; 2\}$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 13$.

$$2) \sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} = \sqrt{2x+9} \quad (1) \quad (\text{ĐK: } -1 \leq x \leq 4)$$

$$\Leftrightarrow x+1+4-x+2\sqrt{(x+1)(4-x)} = 2x+9$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x+1)(4-x)} = 2x+4$$

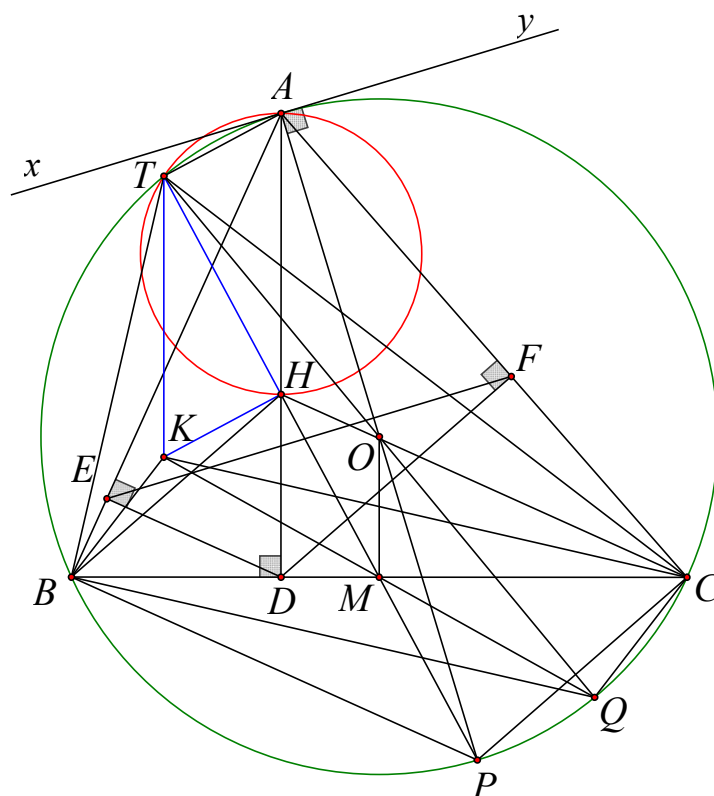
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(4-x)} = x+2 \quad (*)$$

Vì $x \geq -1$ nên $x+2 \geq -1+2 = 1 > 0$

$$(*) \Leftrightarrow (x+1)(4-x) = (x+2)^2 \Leftrightarrow -x^2 + 3x + 4 = x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \quad (TM) \\ x = -\frac{3}{2} \quad (L) \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 0$.

Câu 4. (3,0 điểm)



1) Chứng minh tứ giác $AEDF$ nội tiếp và $AE \cdot AB = AF \cdot AC$

Xét tứ giác $AEDF$ có $\widehat{AED} = 90^\circ$ (E là hình chiếu của D trên AB)

$\widehat{AFD} = 90^\circ$ (F là hình chiếu của D trên AC)

$$\Rightarrow \widehat{AED} + \widehat{AFD} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $AEDF$ nội tiếp (tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180°)

Xét $\triangle ADB$ vuông tại D có DE là đường cao

$$\Rightarrow AD^2 = AE \cdot AB \text{ (hệ thức cạnh và đường cao)}$$

Xét $\triangle ADC$ vuông tại D có DF là đường cao

$$\Rightarrow AD^2 = AF \cdot AC \text{ (hệ thức cạnh và đường cao)}$$

$$\Rightarrow AE \cdot AB = AF \cdot AC$$

2) Chứng minh tam giác ABC đồng dạng với tam giác AFE và AP vuông góc với EF .

Xét $\triangle AFE$ và $\triangle ABC$ có: $\widehat{BAC}$ chung

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB} \text{ (do } AE \cdot AB = AF \cdot AC)$$

$$\Rightarrow \triangle AFE \sim \triangle ABC \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{ABC}$$

Kẻ xy là tiếp tuyến của (O) tại A

$$\Rightarrow \widehat{CAy} = \widehat{ABC} \text{ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung với góc nội tiếp cùng chắn } \widehat{AC} \text{)}$$

$$\Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{CAy} \text{ mà hai góc này là hai góc so le trong}$$

$$\Rightarrow xy // EF \text{ mà } AP \perp xy \text{ (vì } xy \text{ là tiếp tuyến của } (O) \text{)}$$

$$\Rightarrow AP \perp EF$$

3) Chứng minh tứ giác AHKT là hình bình hành.

Vì H là trực tâm $\triangle ABC$ nên BH là đường cao $\triangle ABC \Rightarrow BH \perp AC$

Mà $\widehat{ACP} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow PC \perp AC$

$$\Rightarrow BH // PC$$

Chứng minh tương tự ta có $CH // PB$

Tứ giác $BHCP$ có $BH // PC, CH // PB$ nên là hình bình hành

Gọi M là trung điểm của BC

$$\Rightarrow M \text{ cũng là trung điểm của } PH$$

Tam giác PAH có M, O thứ tự là trung điểm của PH, PA

Nên MO là đường trung bình của $\triangle PAH$

$$\Rightarrow MO = \frac{1}{2}AH \text{ hay } AH = 2MO \text{ (1)}$$

Kẻ đường kính TQ của (O)

Chứng minh tương tự như trên ta cũng có tứ giác $BKQC$ là hình bình hành

$$\Rightarrow M \text{ là trung điểm của } KQ$$

$$\Rightarrow MO \text{ là đường trung bình của } \triangle QTK$$

$$\Rightarrow MO = \frac{1}{2}TK \text{ hay } TK = 2MO \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra $AH = TK$

Vì H là trực tâm $\triangle ABC$ nên AH là đường cao $\triangle ABC \Rightarrow AH \perp BC$

Vì K là trực tâm của $\triangle BTC$ nên TK là đường cao của $\triangle BTC \Rightarrow TK \perp BC$

$$\Rightarrow AH // TK$$

Tứ giác $AHKT$ có $AH // TK, AH = TK$ nên là hình bình hành.

Câu 5 (1 điểm)

$$1) \text{ Giải hệ phương trình: } \begin{cases} \sqrt{4x+5} + 2x = \sqrt{2y+5} + y & (1) \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} = 2 + \sqrt{y+3-x^2} & (2) \end{cases}$$

Điều kiện: $x \geq \frac{-5}{4}; y \geq \frac{-5}{2}$

Ta có: $(1) \Leftrightarrow \sqrt{4x+5} - \sqrt{2y+5} = y - 2x \Leftrightarrow \frac{4x-2y}{\sqrt{4x+5} + \sqrt{2y+5}} = -(2x-y)$

$$\Leftrightarrow (2x-y) \left[\frac{2}{\sqrt{4x+5} + \sqrt{2y+5}} + 1 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ \frac{2}{\sqrt{4x+5} + \sqrt{2y+5}} = -1(ktm) \end{cases}$$

Thay $y = 2x$ vào (2) ta có: $\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x} = 2 + \sqrt{2x+3-x^2}$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x+1} \\ b = \sqrt{3-x} \end{cases}$ với $(a \geq 0; b \geq 0)$

ta có: $ab = \sqrt{x+1}\sqrt{3-x} = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$

Khi đó ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} a+b = 2+ab \\ a^2+b^2 = 4 \end{cases} \quad (3)$

Ta có:

$$(3) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 4 + 4ab + a^2b^2 \Leftrightarrow 4 + 2ab = 4 + 4ab + a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2 + 2ab = 0 \Leftrightarrow ab(ab+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 0 \\ ab = -2(loai) \end{cases}$$

Nếu $ab = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ y = 6 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) \in \{(-1; -2), (3; 6)\}$

2) Xét hai số dương x, y thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{6}{y} = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 4x + y + \frac{1}{x} + \frac{42}{y}$$

Ta có: $P = 4x + y + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{42}{y} = \left(2x + 2x + \frac{2}{x^2} \right) + \left(y + \frac{36}{y} \right) + \left(\frac{1}{x} + \frac{6}{y} \right)$

Áp dụng bất đẳng thức cô si:

$$2x + 2x + \frac{2}{x^2} \geq 3\sqrt[3]{2x \cdot 2x \cdot \frac{2}{x^2}} \Leftrightarrow 2x + 2x + \frac{2}{x^2} \geq 6$$

$$y + \frac{36}{y} \geq 2\sqrt{y \cdot \frac{36}{y}} \Leftrightarrow y + \frac{36}{y} \geq 12$$

Do đó:

$$P = 4x + y + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{42}{y} = \left(2x + 2x + \frac{2}{x^2}\right) + \left(y + \frac{36}{y}\right) + \left(\frac{1}{x} + \frac{6}{y}\right) \geq 6 + 12 + 2$$

$$P \geq 20$$

$$\text{Dấu = xảy ra khi: } \begin{cases} 2x = \frac{2}{x^2} \\ y = \frac{36}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 6 \end{cases} \text{ (do } x > 0; y > 0 \text{)}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 20 khi $(x; y) \in \{(1; 6)\}$
