

Câu I (2,0 điểm)

- 1) Giải phương trình: $x^2 - 4x + 3 = 0$
- 2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$$

Câu II (1,5 điểm)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol (P) có phương trình $y = \frac{-x^2}{2}$ và đường thẳng (d) có phương trình $y = x + m$.

- 1) Tìm tọa độ điểm M thuộc Parabol (P) biết điểm M có tung độ bằng -8 .
- 2) Tìm m để đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B với $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ sao cho $(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) = \frac{33}{4}$.

Câu III (1,5 điểm)

- 1) Rút gọn biểu thức sau: $A = \sqrt{12} - \sqrt{75} + 3\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$.
- 2) Cho biểu thức: $B = \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 1} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} \right)$ (với $x > 0$ và $x \neq 1$).

Rút gọn B. Tìm x là số nguyên dương khác 1 sao cho $B \geq \frac{1}{2}$.

Câu IV (4,0 điểm) Cho đường tròn (O). Từ một điểm M nằm ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến MA và MB của đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Kẻ đường kính BE của đường tròn (O). Gọi F là giao điểm thứ hai của đường thẳng ME và đường tròn (O). Đường thẳng AF cắt MO tại điểm N. Gọi H là giao điểm của MO và AB.

- 1) Chứng minh tứ giác MAOB nội tiếp đường tròn.
- 2) Chứng minh đường thẳng AE song song với đường thẳng MO
- 3) Chứng minh: $MN^2 = NF \cdot NA$.
- 4) Chứng minh: $MN = NH$.

Câu V (1,0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện: $ab + bc + ca = 3$ và $a \geq c$. Tìm GTNN của biểu thức $P = \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{2}{(b+1)^2} + \frac{3}{(c+1)^2}$.

.....HẾT.....

Họ và tên thí sinh:Số báo danh:

Chữ ký của giám thị 1:Chữ ký của giám thị 2:

Lời giải và bình luận đề thi vào lớp 10 THPT tỉnh Hà Nam

Câu I. 1) Giải phương trình $x^2 - 4x + 3 = 0$

2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$$

1) Ta có $a + b + c = 1 + (-4) + 3 = 0$

Suy ra phương trình có hai nghiệm là $x_1 = 1; x_2 = 3$.

2) Ta có
$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x + 3y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ 3y = 1 - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = -2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x; y) = (7; -2)$.

Bình luận. Năm nay câu giải phương trình, hệ phương trình nằm ở câu I; câu này thông thường các năm nằm ở vị trí câu II. Tôi nghĩ cũng là cách để học sinh trung bình dễ làm và dễ được điểm trọn vẹn phần này.

Câu II. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P): $y = \frac{-x^2}{2}$ và đường thẳng (d) có phương trình $y = x + m$

1) Tìm tọa độ điểm M thuộc Parabol (P) biết điểm M có tung độ bằng -8 .

2) Tìm m để đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B

với $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ sao cho $(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) = \frac{33}{4}$.

1) Vì M thuộc (P): $y = \frac{-x^2}{2}$ và $y_M = -8$ nên $x_M = \pm 4$.

Vậy tọa độ của điểm M là: $(4; -8); (-4; -8)$.

2) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$-\frac{x^2}{2} = x + m \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2m = 0. \text{ Để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt thì}$$

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 2m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{2}. (*)$$

Ta có $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là giao điểm của (P) và (d) nên $y_1 = x_1 + m, y_2 = x_2 + m$.

Theo bài ra ta có $(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) = \frac{33}{4}$. Từ đó suy ra $(2x_1 + m)(2x_2 + m) = \frac{33}{4}$

$$\Leftrightarrow 4x_1x_2 + 2m(x_1 + x_2) + m^2 = \frac{33}{4}, \text{ kết hợp với hệ thức Viète } x_1 + x_2 = -2, x_1x_2 = 2m$$

$$\text{ta được } 4m^2 + 16m - 33 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ m = -\frac{11}{2} \end{cases}. \text{ Đối chiếu với điều kiện (*) ta được}$$

$$m = -\frac{11}{2} \text{ là giá trị phải tìm.}$$

Bình luận. Với ý 2) đây là một câu phân loại giữa học sinh trung bình khá và học sinh khá. Tuy nhiên ta thấy trong mấy năm trở lại đây đề thi cho dưới dạng đẳng thức khá rõ nên đây là câu cả hai đối tượng đều làm tốt.

Bài tập tương tự.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho (P): $y = -x^2$ và đường thẳng (d): $y = 3mx - 3$ (m là tham số).

a) Tìm m để đường thẳng (d) đi qua điểm A(1; 3).

b) Xác định các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt sao cho tổng hai tung độ của hai giao điểm đó bằng -10.

Câu III

1) Rút gọn biểu thức sau: $A = \sqrt{12} - \sqrt{75} + 3\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$

2) Cho biểu thức: $B = \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 1} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} \right)$ (với $x > 0$ và $x \neq 1$).

Rút gọn B. Tìm x là số nguyên dương khác 1 sao cho $B \geq \frac{1}{2}$.

1) $A = 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 3\sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 3(2 + \sqrt{3}) = 6.$

2) $B = \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x} + 1}.$

Với $x > 0$ và $x \neq 1$, để $B \geq \frac{1}{2}$ thì $\frac{2}{\sqrt{x} + 1} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 3$. Suy ra $0 < x \leq 9$, kết hợp với điều kiện x là số nguyên dương khác 1 nên $x \in \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ là giá trị cần tìm.

Bình luận. Với ý nhỏ trong ý 2) là ý rõ nhất phân biệt được học sinh trung bình và học sinh khá.

Câu IV. Cho đường tròn (O). Từ một điểm M nằm ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến MA và MB của đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Kẻ đường kính BE của đường tròn (O). Gọi F là giao điểm thứ hai của đường thẳng ME và đường tròn (O). Đường thẳng AF cắt MO tại điểm N. Gọi H là giao điểm của MO và AB.

1) Chứng minh tứ giác MAOB nội tiếp đường tròn.

2) Chứng minh đường thẳng AE song song với đường thẳng MO

3) Chứng minh: $MN^2 = NF \cdot NA$.

4) Chứng minh: $MN = NH$.

Đặt $X = \frac{1}{a+1}, Y = \frac{1}{b+1}, Z = \frac{1}{c+1}$ ($X, Y, Z > 0$).

Vì $a \geq c \Rightarrow Z \geq X$ nên $P = X^2 + 2Y^2 + 3Z^2 \geq 2(X^2 + Y^2 + Z^2) \geq 2(XY + YZ + ZX)$ (bổ đề (1)).

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có $3 = ab + bc + ca \geq 3\sqrt{a^2b^2c^2} = 3abc \Rightarrow 3 \geq 3abc$.
 Áp dụng bổ đề (2) suy ra $a + b + c \geq 3$. Suy ra $a + b + c \geq 3abc$.

$$\text{Do đó } XY + YZ + ZX = \frac{3(a+b+c+3)}{3abc + 3(a+b+c) + 12} \geq \frac{3(a+b+c+3)}{4(a+b+c+3)} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Suy ra } P \geq 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $X = Y = Z \Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{3}{2} \Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Cách 2.

Đặt $X = a + 1, Y = b + 1, Z = c + 1$ ($X, Y, Z > 0$); $a \geq c \Rightarrow X \geq Z \Rightarrow \frac{1}{Z^2} \geq \frac{1}{X^2}$.

Áp dụng bổ đề (2) ta được $P \geq 2\left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2}\right) \geq \frac{2}{3}\left(\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} + \frac{1}{Z}\right)^2$.

Từ giả thiết suy ra $(X-1)(Y-1) + (Y-1)(Z-1) + (Z-1)(X-1) = 3$

Biến đổi và thu gọn ta được $2\left(\frac{1}{XY} + \frac{1}{YZ} + \frac{1}{ZX}\right) = \frac{1}{X} + \frac{1}{Y} + \frac{1}{Z}$. (*)

Áp dụng bổ đề (2) ta được $\left(\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} + \frac{1}{Z}\right)^2 \geq 3\left(\frac{1}{XY} + \frac{1}{YZ} + \frac{1}{ZX}\right)$. (**)

Từ (*) và (**) suy ra $\left(\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} + \frac{1}{Z}\right)^2 \geq \frac{3}{2}\left(\frac{1}{X} + \frac{1}{Y} + \frac{1}{Z}\right) \Rightarrow \frac{1}{X} + \frac{1}{Y} + \frac{1}{Z} \geq \frac{3}{2}$.

$$\text{Do đó } P \geq \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $X = Y = Z \Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{3}{2} \Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Bình luận. Bài bất đẳng thức này phân biệt được rõ ràng giữa học sinh khá và giỏi. Với các bài bất đẳng thức mọi năm thì chỉ cần một vài bước nhỏ và áp dụng AM-GM là đạt được kết quả; tuy nhiên với bài năm nay học sinh nhìn thấy không mấy quen thuộc và có vận dụng bất đẳng thức phụ nên có khó khăn hơn đối với học sinh khá. Trên đây chỉ là hai cách làm theo cách đặt ẩn phụ, tuy nhiên còn có những cách khác không đặt mà học sinh trình bày, nhưng tôi thấy hơi dài và chưa chặt chẽ.

Trần Anh Tuấn – THCS Nhân Hậu.