

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Câu 1: (1,5 điểm)

- 1) Giải phương trình: $5x - 18 = 3x + 24$
- 2) Rút gọn biểu thức $\sqrt{4x} + \sqrt{9x} - \sqrt{16x}$ với $x \geq 0$.
- 3) Tìm x để biểu thức $A = \sqrt{5 - 3x}$ có nghĩa.

Câu 2: (2,0 điểm)

- 1) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 3 \\ 3x - y^2 = 2 \end{cases}$$

2) Tính chiều dài và chiều rộng của một hình chữ nhật. Biết rằng nếu tăng cả chiều dài và chiều rộng lên 4cm thì ta được một hình chữ nhật có diện tích tăng thêm 80cm^2 so với diện tích của hình chữ nhật ban đầu, còn nếu tăng chiều dài lên 5cm và giảm chiều rộng xuống 2cm thì ta được một hình chữ nhật có diện tích bằng diện tích của hình chữ nhật ban đầu.

Câu 3: (2,0 điểm)

- 1) Tìm m để phương trình $x^2 - 2(m + 2)x + 6m + 2 = 0$ có hai nghiệm mà nghiệm này gấp đôi nghiệm kia.
- 2) Tìm tất cả các giá trị m là số nguyên khác -1 sao cho giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = (m + 2)x$ và $y = x + m^2 + 2$ có tọa độ là các số nguyên.

Câu 4: (3,5 điểm)

Cho đường tròn tâm O bán kính R và một đường thẳng d cố định không giao nhau. Hạ OH vuông góc với d. M là một điểm tùy ý trên d (M không trùng với H). Từ M kẻ hai tiếp tuyến MP và MQ với đường tròn (O; R) (P, Q là các tiếp điểm và tia MQ nằm giữa hai tia MH và MO). Dây cung PQ cắt OH và OM lần lượt tại I và K.

- 1) Chứng minh rằng tứ giác OMHQ nội tiếp.
- 2) Chứng minh rằng $\widehat{OMH} = \widehat{OIP}$.
- 3) Chứng minh rằng khi điểm M di chuyển trên đường thẳng d thì điểm I luôn cố định.
- 4) Biết $OH = R\sqrt{2}$, tính $IP \cdot IQ$.

Câu 5: (1,0 điểm)

Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $xy = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M = x^2 + y^2 + \frac{3}{x + y + 1}.$$

SƠ LƯỢC BÀI GIẢI

Câu 1: (tự xử)

Câu 2: (2,0 điểm)

$$\begin{aligned} 1) \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 3 \\ 3x - y^2 = 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2(3x - 2) = 3 \\ y^2 = 3x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 6x - 7 = 0 \\ y^2 = 3x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+7) = 0 \\ y^2 = 3x - 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+7) = 0 \\ y^2 = 3x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-1=0 \\ y^2=3x-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x+7=0 \\ y^2=3x-2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=1 \\ y^2=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-7 \\ y^2=-23 \text{ (vô lý)} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x; y) = (1; 1), (1; -1)$

2) Gọi x, y (cm) lần lượt là chiều dài, chiều rộng hình chữ nhật lúc đầu ($x \geq y > 2$)

Khi đó: Diện tích hình chữ nhật sau khi tăng hai kích thước là $(x+4)(y+4) \text{ (cm}^2\text{)}$

Diện tích hình chữ nhật sau khi tăng chiều dài, giảm chiều rộng $(x+5)(y-2) \text{ (cm}^2\text{)}$

$$\text{Theo đề ta có hệ PT: } \begin{cases} (x+4)(y+4) - xy = 80 \\ (x+5)(y-2) - xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=16 \\ -2x+5y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=6 \end{cases} \text{ (TMĐK)}$$

Vậy chiều dài, chiều rộng hình chữ nhật lần lượt là 10 cm, 6 cm

Câu 3: (2,0 điểm)

1) PT có hai nghiệm $x_1, x_2 \Leftrightarrow (m+2)^2 - (6m+2) \geq 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 + 1 \geq 0$ (đúng với mọi m)

$$\text{Theo vi ét, ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+2) \text{ (a)} \\ x_1 x_2 = 6m+2 \text{ (b)} \end{cases}. \text{ Theo giả thiết, giả sử: } x_1 = 2x_2 \text{ (c)}$$

$$\text{Từ a), c) ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+2) \\ x_1 = 2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ 3x_2 = 2(m+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{4(m+2)}{3} \\ x_2 = \frac{2(m+2)}{3} \end{cases}$$

Thay $x_1 = \frac{4(m+2)}{3}, x_2 = \frac{2(m+2)}{3}$ vào b) ta được:

$$\frac{4(m+2)}{3} \cdot \frac{2(m+2)}{3} = 6m+2 \Leftrightarrow 4m^2 - 11m + 7 = 0 \Leftrightarrow (m-1)(4m-7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=\frac{7}{4} \end{cases}$$

Vậy $m=1$ hoặc $m=\frac{7}{4}$

$$2) \text{ Tọa độ giao điểm của hai đồ thị là nghiệm của hệ } \begin{cases} y = (m+2)x \\ y = x + m^2 + 2 \end{cases}$$

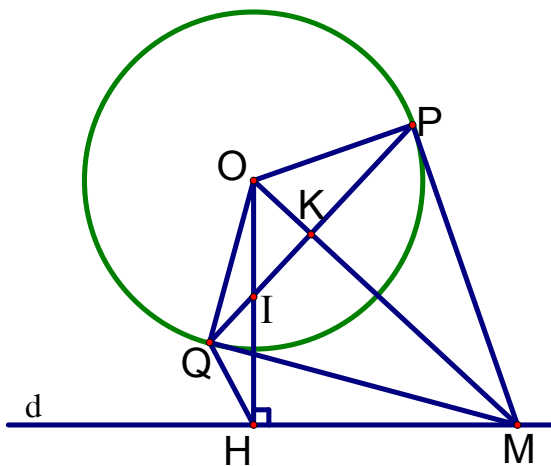
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m+2)x = x + m^2 + 2 \\ y = (m+2)x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)x = m^2 + 2 \\ y = (m+2)x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{m^2 + 2}{m+1} = m - 1 + \frac{3}{m+1} \\ y = (m+2) \cdot \frac{m^2 + 2}{m+1} \end{cases} \text{ (do } m \neq -1)$$

Do đó $x \in \mathbb{Z} \text{ (} m \in \mathbb{Z} \text{)} \Leftrightarrow m+1 \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\} \Rightarrow m \in \{0; -2; 2; -4\}$

+) $m = 0 \Rightarrow y = 4 \in \mathbb{Z}; m = -2 \Rightarrow y = 0 \in \mathbb{Z}; m = 2 \Rightarrow y = 8 \in \mathbb{Z}; m = -4 \Rightarrow y = 12 \in \mathbb{Z}$

Vậy $m \in \{0; -2; 2; -4\}$ thì giao điểm của đồ thị hai hàm số $y = (m+2)x$ và $y = x + m^2 + 2$ có tọa độ là các số nguyên.

Câu 4: (3,5 điểm)



1) Chứng minh rằng tứ giác OMHQ nội tiếp.

$\widehat{OHM} = 90^\circ$ ($OH \perp d$); $\widehat{OQM} = 90^\circ$ (MQ là tiếp tuyến của (O) tại Q)

Vậy tứ giác OMHQ nội tiếp (đpcm)

2) Chứng minh rằng $\widehat{OMH} = \widehat{OIP}$.

$OP = OQ (=R)$; $MP = MQ$ (MP, MQ là hai tiếp tuyến của (O)) $\Rightarrow OM$ là trung trực PQ
 $\Rightarrow OM \perp PQ \Rightarrow \widehat{OKI} = 90^\circ$

Do đó: $\widehat{OIP} + \widehat{HOM} = 90^\circ$ ($\triangle OIK, \widehat{OKI} = 90^\circ$);

$$\widehat{OMH} + \widehat{HOM} = 90^\circ \left(\triangle OHM, \widehat{OHM} = 90^\circ \right) \Rightarrow \widehat{OMH} = \widehat{OIP}$$

3) Khi điểm M di chuyển trên đường thẳng d thì điểm I luôn cố định.

Xét $\triangle OIK$ và $\triangle OMH$ có: $\widehat{OIK} = \widehat{OMH}$ (cmt), $\widehat{OKI} = \widehat{OHM} = 90^\circ$

$$\text{vậy } \triangle OIK \sim \triangle OMH \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{OI}{OM} = \frac{OK}{OH} \Rightarrow OI.OH = OK.OM \text{ (a)}$$

Xét $\triangle OPM$ có: $\widehat{OPM} = 90^\circ$, $PK \perp OM \Rightarrow OK.OM = OP^2 = R^2$ (b)

từ a), b) $OI.OH = R^2$ (không đổi) mà O, d cố định nên OH không đổi $\Rightarrow OI$ không đổi
 $\Rightarrow I$ cố định (do I thuộc đường thẳng OH cố định)

4) Biết $OH = R\sqrt{2}$, tính IP.IQ.

$$\text{Ta có } OI.OH = R^2 \text{ (cmt)} \Rightarrow OI = \frac{R^2}{OH} = \frac{R^2}{R\sqrt{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow IH = OH - OI = R\sqrt{2} - \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

Ta có $\widehat{OHM} = \widehat{OQM} = \widehat{OPM} = 90^\circ$ (theo trên và MP là tiếp tuyến của (O))

$\Rightarrow M, P, O, Q, H$ cùng thuộc đường tròn đường kính OM

Xét $\triangle OIP$ và $\triangle QIH$ có: $\widehat{OIP} = \widehat{QIH}$ (đđ); $\widehat{OPI} = \widehat{QHI}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{OQ}$)

$$\text{vậy } \triangle OIP \sim \triangle QIH \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{IP}{IO} = \frac{IH}{IQ} \Rightarrow IP \cdot IQ = IO \cdot IH = \frac{R}{\sqrt{2}} \cdot \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{R^2}{2}$$

Câu 5: (1,0 điểm)

Ta có $(x+y)^2 \geq 4xy = 4 \Rightarrow x+y \geq 2$ (vì $x+y > 0$)

Đặt $t = x+y \geq 2$.

$$\text{Ta có: } M = x^2 + y^2 + \frac{3}{x+y+1} = (x+y)^2 + \frac{3}{x+y+1} - 2xy = t^2 + \frac{3}{t+1} - 2 = \frac{t^3 + t^2 - 2t + 1}{t+1}$$

$$M - 3 = \frac{t^3 + t^2 - 2t + 1}{t+1} - 3 = \frac{t^3 + t^2 - 5t - 2}{t+1} = \frac{(t-2)(t^2 + 3t + 1)}{t+1} \geq 0 \text{ (vì } t \geq 2)$$

$$M \geq 3. \text{ Đẳng thức xảy ra } \begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1. \text{ Vậy } \min M = 3 \Leftrightarrow x=y=1$$